27 ~~L. III. 97~~

L. Ma.
27.
3.

Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen.

Abgefaßt von

Abraham Gotthelf Kästner

Königl. Großbr. Hofr., der Math. u. Naturl. Prof. der Kön. Ges. d. W. zu Göttingen; der Churfürstlich Braunschw. Lüneburg. Landwirthschafts Ges.; der. K. Schw. u. Preuss. Ak. d. Wiss.; der Erfurtischen Churf. Ges. nützl. Wiss. des Bononischen Instituts, und der Perusinischen Academiae Augustae Mitglied, der Kön. Deutsch. Ges. zu Göttingen Aeltesten, der Leipz. Deutschen Ges. u. der dasigen Gesellschaft der freyen Künste, der Jenaischen lat. und dasigen Teutsch. Gesellschaft, der margräfl. Badenschen latein. Gesellsch. Mitgliede.

der mathematischen Anfangsgründe dritter Theil. Erste Abtheilung.

Zweyte Auflage.

Göttingen
im Verlag der Wittwe Vandenhoeck
1767.

Dem

Hochgebohrnen Freyherrn

Herrn

Carl von Dieden

Königlich-Groß-Britannischen

und Churbraunschweigisch-Lüneburgischen

Hochbetrauten

wirklichen Geheimen Rath

und Groß-Vogt,

Erbherrn von Fürstenstein, Madelungen

und Wellinghausen ꝛc.

Meinem Gnädigsten Herrn.

Hochgebohrner Freyherr
Gnädigster Herr

Ew. Hochfreyherrl. Excellenz verstatten gnädigst, ein Zeichen meiner Unterthänigkeit durch Ueberreichung gegenwärtigen Werkes abzulegen.

Die Wissenschaften, welche seinen Gegenstand ausmachen, haben in dem Vortrage das Vorzügliche, daß sie durch die ordentliche Verbindung der Lehren, ihre Freunde in den Stand setzen, eine grössere Menge von Wahrheiten leicht zu behalten, als das Gedächtniß eines Menschen bey einer andern Einrichtung fassen würde. Wenn die Vergleichung nicht zu stolz schiene, so wagte ich es hinzuzusetzen: Wie Ew. Hochfreyherrl. Exc. nur durch eine genaue

naue und richtige Abtheilung der Zeit und der Geschäffte, eine so grosse Menge der wichtigsten Verrichtungen zu vollenden im Stande sind.

Die Vorsicht, die uns an dem würdigsten Könige zeigt, wie geneigt sie ist unsere Bitten um die Verlängerung theurer Leben zu erhören; gönne unsern Landen noch viel Jahre das Glück, das Ew. Hochfreyherrl. Excellenz, Einsicht, Redlichkeit und patrioti-

scher Eifer Ihnen jetzo verschaffen. Ich verharre mit tiefster Devotion

Hochgebohrner Freyherr
Gnädigster Herr
Ew. Hochfreyherrl. Excellenz

Göttingen
den 8. Januar.
1760.

unterthänigst-gehorsamster
Abraham Gotthelf Kästner.

Vorrede.

Betrachtungen über das Verfahren, dessen man sich in der Algebra zu Erfindung der Wahrheit bedienet, würden hier ihre gehörige Stelle finden, wenn ich nicht diejenigen, welche meine Gedanken hierüber zu lesen verlangen, auf die Vorrede verweisen müßte, die ich Herrn Hubens **Versuch einer analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten** (*) vorgesetzt habe. Ich will also hier nur einige Gesetze anzeigen, die ich bey der Ausarbeitung gegenwärtiger Einleitung in die Algebra zu beobachten gesucht habe.

(*) Göttingen 1759. bey Boßiegeln.

Vorrede.

Meine Hauptabsicht ging dahin, diejenigen, die sich meines Unterrichts darinnen bedienen wollten, so vorzubereiten, daß sie ihre Erkäntniß aus andern analytischen Schriften ohne Anstoß zu erweitern im Stande wären. Die Menge von Begriffen und Regeln, die ich dieserwegen in einen engen Raum zusammen zu bringen suchte, verstattete nicht, jede Regel mit so viel Exempeln zu erläutern, als man in weitläuftigen Anleitungen zur Algebra nachlesen kann, wenn man hier gelernt hat, wie bey ihnen zu verfahren ist. Es wird genug seyn, daß bey jeder Regel so viel gesagt ist, als man zu ihrer Erläuterung fodern kann. Zugleich aber habe ich allezeit die Richtigkeit der Vorschriften der Algebra bündig darzuthun gesucht. Ob dieses von allen Schriftstellern ist beobachtet worden, will ich aus dem Ausdrucke beurtheilen lassen, dessen sich der Freyherr von Wolf bedient: „Reynault habe Harriots

riots Lehrsatz aus seiner Analyse demontrée weggelassen, weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollen.„ (*) Ich kann nicht läugnen, daß mir dieser Ausdruck, den ich bey dem Anfange meines algebraischen Fleisses las, etwas anstößig vorkam; denn ich fand nur deßwegen an der Mathematik Gefallen, weil man alles in ihr demonstriren konnte, und ich hielt die Algebra für einen der schönsten Theile der Mathematik. Ich erfuhr aber wirklich, daß nicht alles in der Algebra wenigstens völlig allgemein und mit allen Umständen demonstrirt wird, was man dafür ausgiebt. Verschiedene dergleichen Erinnerungen fand ich bey dem gewöhnlichen Vortrage der Lehre von den Gleichungen zu machen. Wenn man ihren Ursprung aus der Multiplication erklärt, so giebt man meines Erachtens den Grund nicht allemahl deutlich genug an, weß-

(*) Anfangsgr. der Alg. 316 §.

weßwegen man die Wurzelgleichungen auf o bringen muß; und wie einerley Buchstabe zugleich verschiedene Grössen bedeuten kann, welches ich 214. §. III; IIII; Abs. zu erläutern gesucht habe. Es fällt in die Augen, daß Wurzelgleichungen mit einander multiplicirt höhere geben; aber mir schien der umgekehrte Satz eines strengern Beweises nöthig zu haben, daß es erlaubt ist, jede Gleichung als ein Product aus Wurzelgleichungen anzusehen (221. §.) der so wichtige Satz, daß die unmöglichen Wurzeln allemahl paarweise vorhanden sind, führte mich auf umständlichere Betrachtungen über die unmöglichen Grössen und derselben verschiedene Arten, als man sonst anzustellen pflegt, (228.=272 §.) mit denen aber zugleich verschiedene anderswo brauchbare Sätze (243; und 246 §.) verbunden sind. Bey den Regeln, die irrationalen Wurzeln durch Näherung zu finden, (304 u. f. §.) habe ich gesucht vollständig darzuthun, so

wohl

wohl wie man die ersten Näherungen findet, als auch wie man dieselben immer weiter fortsetzt. Ich habe ein gleiches mit der Auflösung der Gleichungen, welche zwo veränderliche Grössen enthalten, vermittelst des Newtonischen Parallelogrammes geleistet (632. und f. §.) wo ich glaube, die Beweise dieser so wichtigen Erfindung schärfer geführt zu haben, als ich sie in Schriften, die mir vorgekommen sind, angetroffen habe. Colson wenigstens, aus dem ich anfangs diese Methode allein habe kennen lernen, hat ihren Gebrauch zwar sehr deutlich und weitläuftig erklärt, aber von dem Beweise, weniger gesagt als ein gemeiner Rechenmeister bey den Regeln der Rechenkunst zu sagen pflegt, so daß mir das Vergnügen übrig blieb die Gründe von allen Vorschriften selbst aufzusuchen.

Man begnügt sich in der Algebra sehr oft allgemeine Gesetze anzunehmen, wenn

man

man sich von der Richtigkeit derselben bey einigen besondern Fällen versichert hat. Eines der bekanntesten Exempel ist wohl der binomische Lehrsatz. Ich hatte eben soviel Eifer die Regeln der Algebra zu demonstriren, als Reynault kann gehabt haben, und in der That wäre es eine Schande für einen Deutschen, wenn er da nicht demonstriren wollte, wo selbst ein Franzose dieses unternimmt. Daher habe ich in solchen Fällen ordentlich das Verfahren gebraucht, dessen sich Jacob Bernoulli in der Arte Coniectandi beym Erweise des Hauptsatzes von den figurirten Zahlen bedient, das ich zuerst aus Hausens Elementis Arithmetices hatte kennen lernen. Die Beweise des binomischen Lehrsatzes (140) und des Gesetzes der Differenzen (724) sind Exempel davon.

Die anfangs angezeigte Absicht meines Lehrbuchs nöthigte mich von verschiedenen

Din-

Dingen zu handeln, die man bisher eben nicht in den Anfangsgründen der Algebra angetroffen hat. Ich habe mich dabey vornehmlich der Schriften eines Gelehrten bedient, der mit gleicher Geschicklichkeit, sich zu Anfängern herabzulassen, und die größten Meister zu lehren weiß. Weil ich hier Leser zum voraussetzen darf, die noch wenig Kenntniß von der höhern Mathematik haben, so ist mir erlaubt hinzusetzen, daß es Herr Euler ist.

Unter denjenigen Dingen, die allenfalls hätten wegbleiben können, will ich jedem nach seinem Geschmacke freystellen, ob er die Berechnungen der Wahrscheinlichkeit beym Lombre (742) oder der Modorum der Syllogismen (744) für entbehrlicher halten will. Ich glaube, es wäre eine Preisfrage, so wichtig als sie manchmahl von einigen französischen Akademien der schönen Wissenschaften pflegen aufgegeben

zu werden, ob mehr Nachdenken nöthig gewesen ist das Lombre, oder die Figuren und Modos zu erfinden. Mein Landsmann Christian Thomas, dessen Schicksaal war durch seinen Witz Pedanten zu mißfallen, hat wenigstens in seinen Monatsgesprächen die Erfindung des Lombre dem Aristoteles zugeschrieben.

Den Beweis des Newtonischen Lehrsatzes (751) habe ich vor diesem in die philosophischen Untersuchungen und Nachrichten einrücken lassen, die der jetzige Kön. Dän. Herr Oberhofprediger Cramer zu Leipzig 1746. herauszugeben anfing; die Besorgung der letzten Stücke aber, soviel ich mich erinnere, wegen der Veränderung seines Aufenthaltes Herrn Mylius überließ. Mein Aufsatz nimmt daselbst die zweyte Stelle im sechsten Stücke ein. Man wird wohl nichts dabey zu erinnern finden,

finden, daß ich ihm einen gehörigen Platz hier eingeräumet habe, wie ich den Inhalt verschiedener von mir seit vielen Jahren herausgegebenen Abhandlungen in gegenwärtiges Werk gebracht habe. Vielleicht wäre es gut, wenn niemand ein Lehrbuch schriebe, der sich nicht erst an einzelnen Untersuchungen aus seiner Wissenschaft geprüft hätte, ob er in ihr etwas zu sagen wisse, das seine Vorgänger im Compendienschreiben nicht eben so gesagt haben.

Mit der Rechnung des Unendlichen, welche der zweyte Band gegenwärtiger Algebra werden soll, hoffe ich künftige Ostern diese Anfangsgründe der Mathematik zu schliessen. Der jetzige Band hätte, in so fern es auf mich ankam, schon an der letzten Leipziger Michaelismesse erscheinen können; Ich habe mich der Verzögerung, die mir wegen der Umstände meines Vaterlandes verstattet wurden,

bedienet, noch einiges auszubessern und beyzufügen.

Göttingen im December 1759.

Erin-

Erinnerung
wegen der zweyten Auflage.

Man wird in diesen Anfangsgründen, keine beträchtlichen Vermehrungen bey einer neuen Ausgabe erwarten. Bey einigen Sätzen sind Beweise beygefügt worden, wo die Erfahrung mich gelehrt hatte, daß Anfänger solche für sich nicht entdeckten, wie 112 §. der Ursprung der Gleichungen aus der Multiplication 214 u. f. §. ist ohne Schaden der Deutlichkeit und Schärfe etwas kürzer vorgetragen worden, der Satz des 222 §. den die Algebraisten insgemein stillschweigend annehmen, ist gehörig bewiesen; im 272 §. ist genauer angegeben, was die vorherge-

hen-

henden Sätze, von der Beschaffenheit und Menge der unmöglichen Wurzeln zuverläs-sig darthun, bey dem newtonischen Paral-lelogram, sind theils nur Erläuterungen beygebracht, theils einige welche am Ende voriger Ausgabe stunden, jezo an ihre ge-hörige Stelle gesetzt. Göttingen im Julius 1767.

Innhalt

Innhalt.

Ergänzung der Buchstabenrechnung von der Division, den Reihen, u. s. w. 1. S.

Rechnung mit den Wurzelgrössen 13

Anwendungen der Buchstabenrechnung 19

Die Algebra

Die einfachen Gleichungen 29

Quadratische Gleichungen 37

Von der arithmetischen Progreßion 40

Von der geometrischen Progression 45

Der binomische Lehrsatz, für ganze bejahte Exponenten 52

Geometrische Aufgaben 68

Unbestimmte Aufgaben 79

Von den Gleichungen 86

Ursprung der Gleichungen aus der Multiplication 100

Von den irrationalen und unmöglichen Wurzeln 115

Veränderungen mit den Wurzeln und Gliedern der Gleichungen 137

Ob eine Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln hat zu finden 141

Innhalt.

Von den Gränzen der Wurzeln 152 S.

Die irrationalen Wurzeln durch Näherung zu finden 153

Von der Reihe, welche entsteht, wenn man statt x in einer Gleichung andere und andere Werthe setzt, und den Reihen ihrer Unterschiede 153

Näherung zur Wurzel 166

Von den krummen Linien 180

Die gerade Linie 187

Die Parabel 192

Die Ellipse 195

Aehnlichkeit der Ellipsen 202

Die Hyperbel 203

Von den Linien der zweyten Ordnung 211

Begriff der Tangente 226

Exempel anderer krummen Linien, und allgemeine Lehren von ihnen. 235

Von den geometrischen Oertern 251

Von der Construction der Gleichungen 252

Wie die Natur der Flächen durch Gleichungen ausgedrückt wird. 262

Von den Schnitten der Flächen 263

Von Flächen, deren Gleichungen gleichartig sind 266

Von

Innhalt.

Von runden Körpern 274 S.

Von den Schnitten einer Fläche mit jeder gegebenen Ebene 275

Die Schnitte des senkrechten Kegels 276

Von den transcendentischen krummen Linien 288

Zwischen dem Sinus oder der Sehne und dem Bogen läßt sich keine algebraische Gleichung finden 301

Von der unbestimmten Quadratur des Kreises 302

Ausdrückungen der Functionen durch unendliche Reihen 303

Das newtonische Parallelogramm 311

Umkehrung der Reihen 357

Eine andere Art die folgenden Glieder einer unendlichen Reihe zu finden 359

Auflösung der cubischen Gleichungen durch Cardans Regel 368

Allgemeine Formeln der Differenzen und Summen 383

Die figurirten Zahlen 392

Die Combinationen 397

Anwendung derselben auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit 404

Die Modi der Syllogismen 405

Innhalt.

Lehrsatz von den Triangularzahlen 408 S.

Die Verhältniß zwischen den Coefficienten einer Gleichung und den Summen der Potenzen der Wurzeln 409

Die ersten Coefficienten einer Potenz, wenn der Exponent ein Bruch oder verneint ist 418

Colsons endliche Reihe für eine Potenz, deren Exponent verneint ist 422

Allgemeiner Beweis zu 624; 423

Ausdruck der figurirten Zahlen, wenn nur die wirklichen Glieder jeder Columne gezählt werden. 424

Ergänzung der Buchstabenrechnung

zu Arithm. II. Cap.

1. Erkl. Eine zusammengesetzte Grösse heißt, die aus verschiedenen mit + und — zusammengehengten Gliedern oder Theilen besteht.

2. Erkl. Eine solche Grösse wird nach einem gewissen in ihr befindlichen Buchstaben geordnet, wenn ihre Theile so nach einander folgen, wie in ihnen die Exponenten der Potenzen dieses Buchstabens wachsen oder abnehmen, das ist, die Glieder steigen oder fallen.

So ist $y^3 + ay^2 - bcy + abc$ nach y geordnet, und zwar so, daß die Potenzen abnehmen, oder daß

das erste Glied die höchste Potenz hat, und die Glieder fallen, wenn man diesen Ausdruck von der linken gegen die rechte Hand lieset. Läse man ihn umgekehrt, so machte die niedrigste Potenz, deren Exponent = o ist (Ar. II. 11.) den Anfang, und die Glieder stiegen.

3. Zus. Wenn in der Reihe der Potenzen eine fehlt, so kann man sich vorstellen, sie sey in o multiplicirt, und ihre Stelle, wo es nöthig ist, mit einem willkührlichen Zeichen, z. E. einem * ausfüllen. Wäre im Exempel (2) a = o; so hätte man $y^3 * - bcy *$

4. Zus. Die Exponenten können auch gebrochene und verneinte Zahlen (Ar. II. 9; 12;) seyn.

Ex. $z^{\frac{7}{2}} + z^{\frac{5}{2}} * - z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} + z^{-\frac{3}{2}}$

$= z^3 \sqrt{z} + z^2 \sqrt{z} * - \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{z\sqrt{z}}$

Die letztern werden für kleiner als positive angesehen, (Ar. I. 95.) daher die Glieder steigen (2) wenn man von ihnen anfängt, oder fallen, wenn sie zuletzt stehen.

5. Erkl. Die Zahlen oder Buchstaben, welche in jedem Gliede (1) der geordneten Grösse (2) in die Potenz des Buchstabens, nach dem man sie geordnet hat, multiplicirt sind, heissen Coefficienten. wie 1; a; —bc; abc; im Exempel (2)

6. Aufg. Zusammengesetzte Grössen mit einander zu dividiren.

Aufl. I. Man ordne den Divisor und Dividendus nach einerley Buchstaben, so daß in beyden die Glieder steigen oder fallen, nachdem sie im Quotienten steigen oder fallen sollen.

II. Man dividire des Dividendus erstes Glied, durch das erste Glied des Divisors nach Ar. II. 6. dieses gibt des Quotienten erstes Glied.

III. Des Quotienten erstes Glied multiplicire man mit dem ganzen Divisor und ziehe das Product ab;

III. Das Product aus dem ersten Gliede des Quotienten in des Divisors erstes Glied, wird beym Abzuge das erste Glied des Dividendus aufheben (II. und Ar. I; 16.)

V. Die übrigen Glieder des abgezogenen Products, nebst den übrigen Gliedern des Dividendus, geben einen Rest, dessen erstes Glied dasjenige ist, das nach der Ordnung (I) zunächst nach des Dividendus ersten Gliede folgt.

VI. Dieses Restes erstes Glied dividire man durch des Divisors erstes Glied wie (II) so hat man des Quotienten zweytes Glied.

VII. Damit verfahre man wie mit dem ersten Gliede (III.)

VIII. Das Product aus dem gefundenen Gliede des Quotienten in des Divisors erstes Glied, wird

allemahl des Restes erstes Glied beym Abzuge aufheben wie in IIII.

VIIII. Des abgezogenen Products (VII) übrige Glieder, nebst des vorigen Restes übrigen Gliedern, geben einen neuen Rest, dessen erstes Glied dasjenige ist, das der Ordnung (I) gemäß zunächst nach des vorigen Restes ersten Gliede folgt.

X. Aus ihm wird wie in VI das folgende Glied des Quotienten gefunden, und so nach VII; VIII; VIIII; fortgefahren.

XI. Der erste Rest giebt des Quotienten zweytes Glied, der zweyte das dritte, und so der m te das m + 1 te.

Exempel.

Quotient

$(x^3 - 2x^2, + 103.x - 2.103$

Divisor	Dividend
$x^2+2x-99$	$x^5 ** + 2.99x^2 - 103^2.x + 103.198$

$x^5 + 2x^4 - 99x^3$

$0 - 2x^4 + 99x^3 + 2.99x^2 - 103^2.x + 103.198$

$-2x^4 - 4x^3 + 2\ 99x^2$

$0 + 103x^3 * - 103^2.x + 103.198$

$+ 103x^3 + 2.103x^2 - 99.103x$

$0 - 2.103x^2 - 4.103x + 103.198$

$- 2.103x^2 - 4.103x + 103.198$

0 0 0

7. Zus. Wenn der Dividend kein Product aus dem Divisor in eine Grösse ist, die aus einer endlichen Menge von Gliedern besteht, so wird der Quotient eine unendliche Menge von Gliedern enthalten.

Exempel.

Divisor	Dividend	Quotient
$1-x$	1	$1+x+x^2\ldots$

$$\begin{array}{r} 1-x \\ \hline * \quad +x \\ +x-x^2 \\ \hline * \quad +x^2 \end{array}$$

Hier erhellet, daß der Quotient nach der Reihe alle Potenzen von x enthalten wird. Gesetzt, es sey der mte Rest x^m, so gibt dieser das $(m+1)$te Glied des Quotienten x^m, dessen Product in den Divisor ist $x^m - x^{m+1}$, welches von dem Reste abgezogen, $+x^{m+1}$ zum $(m+1)$ten Reste, und also $+x^{m+1}$ zu des Quotienten $(m+2)$ten Gliede giebt. Wenn also ein Rest positiv ist, und aus der Potenz von x besteht, deren Exponent seine Zahl nach (6; XI) verstanden ist, so gibt er diese Potenz von x für das Glied des Quotienten, dessen Zahl, eins mehr ist als die Zahl des Restes; und jeder folgender Rest ist auch positiv und besteht aus der Potenz von x deren Exponent von x seine Zahl ist, und gibt diese Potenz zum Gliede des Quotienten, dessen Zahl eins mehr ist als die Zahl des Restes.

Nun trifft dieses bey dem ersten Reste ein; Seine Zahl ist 1; er ist + x und gibt + x zum zweyten Gliede des Quotienten. Also trifft es auch bey dem zweyten Reste, und so bey allen folgenden ein.

Also ist der (m + 1)te Rest überhaupt $x^m + 1$, und wenn man die Division nicht ohne Ende fortsetzen, und doch, den Quotienten vollständig haben will, so muß man ihn folgendergestalt ausdrücken:

$$\frac{1 + x + x^2 \ldots\ldots + x^m + x^m + 1}{1 - x}$$

8. Zus. Weil $\frac{a}{a-b} = \frac{1}{1-\frac{b}{a}}$ (Ar. 1; 66; 69; 85)

so gibt das Exempel (7) $\frac{b}{a}$ statt x gesetzt

$$\frac{a}{a-b} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} \ldots + \frac{b^m}{a^m} \ldots$$

Man suche den Quotienten $\frac{1}{9999}$ wo a = 10000; b = 1; also x = 0,0001 so wird derselbe

= 1 + 0,0001 + 0,00000001 + 0,000000000001 u. s. w. wo also gleich die ersten Glieder des Quotienten ihn sehr genau geben.

9. Erkl. Eine Reihe (series) heißt eine Menge von Grössen, Gliedern, oder Theilen, deren jede nach einem gewissen allen gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt wird. Der Ausdruck, welcher dieses gemeinschaftliche Gesetz darstellt, heißt ein allgemeines Glied (terminus generalis.)

So

So sind die Quotienten 7; 8; Reihen, weil jedes Glied eine Potenz ist, deren Exponent um eines weniger ist als die Zahl des Gliedes und $+x^m$ ist ein allgemeines Glied der Reihe 7.

10. Erkl. Die Summe einer Reihe heißt, was herauskömmt, wenn man ihre Glieder, jedes mit seinem Zeichen, nachdem es + oder — hat genommen zusammen rechnet. Eben so versteht man die Summe einer gewissen Menge von Gliedern der Reihe.

11. Erkl. Wenn man der Summe der Reihe immer näher und näher kömmt, je mehr man von den ersten Gliedern findet und derselben Summe nimmt, so nähert sich die Reihe (conuergit). Im entgegengesetzten Falle entfernt sie sich. (diuergit) Die Ergänzung (supplementum) die zu der Summe der ersten Glieder kommen muß, daraus die Summe der ganzen Reihe zu machen, wird in dem ersten Falle immer kleiner je mehr Glieder man nimmt, im andern immer grösser. Nimmt man die Ergänzung mit zu der Reihe, so findet man allemahl den richtigen Wehrt, die Reihe mag sich nähern oder entfernen. Aber man hat alsdenn von dem Gebrauche der Reihe keinen grossen Vortheil.

12. Zus. Damit sich die Reihe nähert, müssen die folgenden Glieder immer kleiner werden. Steigen sie also (2) so muß der Buchstabe, nach dem sie

geordnet sind, in sofern die Näherung blos auf ihn und nicht auf die Coefficienten (5) ankommen soll, einen eigentlichen Bruch bedeuten (Ar. I. 76) fallen sie aber, so muß es eine ganze Zahl, je grösser desto besser, bedeuten.

Im Exempel (7) nähert sich die Reihe, und zwar sehr schnell, wenn x ein kleiner Bruch ist, (8) sollte sich die Reihe nähern, wenn x eine grosse Zahl ist, so müßte man diese Zahl zu des Divisors ersten Theile machen. So wäre

Divisor Divid. Quotient

$$x-1 \Big(1 \qquad \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots$$

$$1 - \frac{1}{x} \Big) \; * + \frac{1}{x}$$

$$+ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Big) \; * + \frac{1}{x^2}$$

So fände man für $x = 10000$; $\frac{1}{9999} =$ 0, 0001 + 0, 000 000 01 + 0, 000 000 000 001 u. s. w.

13. Zus. So findet man

Divis.	Divid.	Quotient
$1+x$	1	$1-x+x^2-x^3$
	$1+x$	
	$*-x$	
	$-x-x^2$	
	$*+x^2$	
	$+x^2-x^3$	
	$*+x^3$	

Hier erhellt, daß die Zeichen der Reste und der Glieder des Quotienten abwechseln. Es bedeute n eine ganze Zahl, und also 2n eine gerade Zahl, und man nehme an, ein Rest, dessen Zahl 2n ist, sey $+x^{2n}$ so gibt er eben das, für das $(2n+1)$te Glied des Quotienten, und dieses mit dem Divisor multiplicirt gibt $+x^{2n}+x^{2n+1}$ also ist nach geschehenen Abzuge der $(2n+1)$te Rest $=-x^{2n+1}$ und eben das ist auch das folgende $(2n+2)$te Glied, und dieses mit dem Divisor multiplicirt und das Product abgezogen gibt für den $(2n+2)$ten oder 2. $(n+1)$ten Rest $+x^{2n+2}$ welches auch das $(2n+3)$te Glied ist. Ist also ein gewisser Rest, dessen Zahl gerade ist, positiv, und der Potenz von x gleich, deren Exponent diese gerade Zahl ist, so ist eben dieser Rest dem Gliede des Quotienten gleich, dessen Zahl die nächstfolgende ungerade Zahl ist; Auch ist der nächste ungerade Rest negativ, und

der Potenz gleich, deren Exponent seine Zahl ist, und dem Gliede des Quotienten gleich, dessen Zahl die nächst grössere gerade Zahl ist; und aus diesem Gliede des Quotienten folgt wieder ein positiver Rest, dessen Zahl gerade ist, und der der Potenz welche diese gerade Zahl zum Exponenten hat, gleichet, das ist, der eben so wie der zweyte vor ihm beschaffen seyn, und folglich eben so einen ungeraden Rest nach sich geben wird, wie der ungerade zunächst vor ihm war. Aber wenn man setzt $n = 1$ so ist der zweyte Rest positiv und der zweyten Potenz gleich, folglich der dritte negativ, und der dritten Potenz gleich; und der vierte wieder positiv und der vierten Potenz gleich, also der fünfte negativ und der fünften Potenz gleich u. s. f. auch ist jeder Rest einem Gliede des Quotienten gleich, dessen Zahl eins mehr ist als die Zahl des Restes, woraus das Gesetz der Glieder des Quotienten in Ansicht auf die Zeichen und die Potenzen folgt.

14. Zus. Der Quotient ist also vollständig (wie in 7)

$$1 - x + x^2 \cdots + x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{1+x} \quad (A)$$

oder

$$1 - x + x^2 \ldots\ldots\ldots - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x} \quad (B)$$

In dem Falle (A) ist die Zahl der gefundenen Glieder des Quotienten ungerade; sein letztes Glied, das $(2n+1)$te wurde aus einem geraden positiven Reste gefunden; und der nächstfolgende ungerade

Rest

Rest ist verneint, und gibt mit dem ganzen Divisor dividirt, und an die gefundenen Glieder gehenkt, wie in (7) die Ergänzung (11). Im Falle B wurde das letzte Glied, dessen Zahl gerade ist, aus einem ungeraden negativen Reste gefunden, und der nächstfolgende gerade ist positiv, und gibt mit dem ganzen Divisor dividirt die Ergänzung.

14. Zus. Man setze in (13); $x = 1$ so findet man

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots + 1 - \frac{1}{2} \quad (A)$$

oder $$= 1 - 1 + 1 - 1 \ldots + 1 - 1 + \frac{1}{2} \quad (B)$$

Jedes ungerade Glied hebt sich mit seinem nächstfolgenden geraden Gliede auf. Im ersten Falle bleibt also das letzte ungerade Glied 1 zu dem die Ergänzung $-\frac{1}{2}$ kömmt, mit ihm die Summe $\frac{1}{2}$ zu machen (11). Im zweyten Falle heben sich auf diese Art alle Glieder auf, und die Ergänzung macht für sich $\frac{1}{2}$.

15. Anm. Die Mathematikverständigen, welche auf diese Ergänzung nicht acht gegeben haben, haben in diesem Exempel Schwierigkeiten gefunden; denn wenn man bedenket, daß jedes ungerade Glied mit seinem nächstfolgenden ○ macht, und die Reihe unendlich annimmt, so scheint es, als wäre eine unendliche Reihe $○ + ○ + ○ \ldots = \frac{1}{2}$. Leibnitz hat diese Schwierigkeit zu heben gesucht, Act. Erud. Suppl. T. V. p. 267. und Guido Grandi hat in dieser eingebildeten Wirkung des Unendlichen ein Gleichniß der Schöpfung aus Nichts zu finden geglaubt. Die Betrachtung der Ergänzungen vernichtet das ganze Geheimniß. S. meine Schrift de lege continui in natura Lipſ. 1750. p. IIII.

16. Zuſ.

16. Zus. Der Quotient $\frac{a}{a+b}$ ist von $\frac{a}{a-b}$ (8) nur darinnen unterschieden, daß die gerade Glieder, das zweyte, vierte, u. s. w. verneint werden.

17. Anm. In Geograph. 28. heisse LD = a; DB = b so ist $\frac{\cos L}{1} = \frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \ldots$ (16) Wenn nun hier b in Vergleichung mit a sehr klein ist, so kann man sich gleich mit den ersten beyden Gliedern begnügen. Es sey b = 5 Fuß; a = 19629510 F. nach Picards Abmessung, so ist $\frac{b}{a} = 0,000\,000\,254$ kleiner als 3^{-7} folglich aus Ar. III. 9, die höchste Ziffer des Quadrates von $\frac{b}{a}$ geringer als 9^{-14} und daher geringer, als daß sie in Betrachtung käme, wenn man die Sinus auch noch weiter suchen wollte, als sie in den gewöhnlichen Tafeln gesucht sind. (Trigon. 2. S. 2. Anm.) Man kann also dieses Quadrat, und noch mehr, die höhern Potenzen weglassen, und ohne Fehler annehmen $\frac{\cos L}{r} = \frac{1-b}{a}$ folglich für den Halbmesser der gemeinen Tafeln r. $\left(\frac{1-b}{a}\right)$ oder cos L = 9999997; also L ohngefähr $2'\frac{1}{2}$, daß man also nur den Umkreis des Halbmessers LA (Geom. 44 S.) berechnen und daraus die Länge des Bogens AD von $2'\frac{1}{2}$ suchen darf. Aber bey diesem Halbmesser beträgt ein Grad 342360 Fuß und also der Bogen AD 14265 F.

Die

Die Rechnung mit den Wurzelgrössen.

18. Erkl. Wenn aus einer Grösse eine Wurzel gezogen ist (Ar. I. 47.) so nenne ich den ganzen Ausdruck zusammen eine Wurzelgrösse. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen, aus der nähmlich die Wurzel soll gezogen werden, kann selbst eine Potenz, und die Wurzelgrösse zusammen, eine Irrationalzahl (Ar. IIII. 42.) seyn, daher man dieses auch die Rechnung mit den Irrationalzahlen nennt.

19. Aufg. Wenn bey verschiedenen Wurzelgrössen, die Wurzeln verschiedene Exponenten (Ar. I. 48.) haben, Ausdrückungen zu finden, die eben diesen gegebenen Wurzelgrössen gleich sind, wo aber die Wurzeln einerley Exponenten haben, d. i. Wurzelgrössen auf einerley Benennung zu bringen.

Aufl. Man drücke jede Wurzelgrösse als eine Potenz aus, deren Exponent ein Bruch ist, (Ar. II. 9.) man bringe diese Brüche auf einerley Benennung (Ar. I. 72.) so geben sie unter dieser Gestalt auch Exponenten von Potenzen ab, welche noch die vorigen Wurzelgrössen bedeuten; und man kann nach Ar. II. 9. diese Potenzen rückwärts durch Wurzelgrössen ausdrücken.

Man

Man soll $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[e]{y^c}$ auf eine Benennung bringen. Die erste Wurzelgrösse ist $= x^{\frac{n}{m}}$ und die zweyte $= y^{\frac{c}{e}}$ also auch die erste $x^{\frac{ne}{me}} = x^{\frac{nc}{mc}}$ und die zweyte $= y^{\frac{me}{mc}} = \sqrt[mc]{y^{me}}$ wo der Wurzeln Exponenten einerley sind.

Soll man also $\sqrt[3]{7^2}$ und $\sqrt[5]{9^c}$ auf eine Benennung bringen, so setze man $m=3$; $x=7$; $n=2$; $e=2$; $y=9$; $c=5$; folglich $me=6$, $ne=4$; $mc=15$ und verwandele also beyde Ausdrückungen in $\sqrt[6]{7^4}$; $\sqrt[6]{9^{15}}$

20. Lehrs. Die Potenz eines Products (Ar. I; 45.) ist ein Product aus den Potenzen der Factoren; oder $(ab)^m = a^m b^m$

Bew. Denn $(ab)^m$ ist ein Product aus m Factoren, deren jeder $=ab$ ist; folglich ein Product aus m Factoren, deren jeder $= a$; in eben so viel, deren jeder $= b$; d. i. ein Product aus a^m in b^m.

21. Zus. Folglich ist $\left(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}\right)^n = ab$ (Ar. II; 8)
Und daher $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
d. i. die Wurzel aus einem Producte ist ein Product aus den Wurzeln seiner Factoren.

22, Zus. Eben so $\left(\frac{c}{e}\right)^m = \frac{c^m}{e^m}$ (Ar. I. 75.)

und

und daher $\left(\frac{c^{n}}{e^{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{c}{e}$ (Ar. II; 8.) also $\sqrt[n]{\frac{c}{e}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{e}}$, das ist, die Potenz oder die Wurzel eines Bruchs, ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Potenzen oder Wurzeln des Zählers und Nenners sind.

23. Anm. Aus Ar. I. 85. erhellt, daß die Buchstaben hier auch Brüche und selbst Irrationalzahlen bedeuten können.

24. Zus. $\sqrt[m]{a^{m}\,b} = \sqrt[m]{a^{m}}.\ \sqrt[m]{b} = a\ \sqrt[m]{b}$. Enthält also die Grösse unter dem Wurzelzeichen einen Factor, der eine Potenz ist, welche mit den Wurzelzeichen einerley Exponenten hat, so kann man die Wurzelgrösse einfacher ausdrücken, (ad simpliciorem expressionem reducere) wenn man unter dem Wurzelzeichen nur den übrigen Factor, der keine solche Potenz ist, läßt, und die Wurzel der Potenz als einen Factor vor das Wurzelzeichen schreibt.

So ist $\sqrt{45} = \sqrt{9}.\ \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{8.7} = 2\sqrt[3]{7}$.

25. Zus. Wenn bey zwo Wurzelgrössen von einerley Benennung (19) nach diesem Verfahren einerley Zahlen unter dem Wurzelzeichen bleiben; so verhalten sich diese Wurzelgrössen wie die Zahlen vor den Wurzelzeichen, und haben also eine Ra-

tio-

tionalverhältniß. (Ar. V. 25.) Sie heissen quantitates communicantes.

$$\sqrt{63} : \sqrt{28} = 3\sqrt{7} : 2\sqrt{7} = 3 : 2$$

26. Zus. Ein Product aus einer Rationalzahl in eine Wurzelgrösse, wird völlig in eine Wurzelgrösse verwandelt, wenn man die Rationalzahl vor dem Wurzelzeichen wegläßt, und die Potenz von ihr, die mit dem Wurzelzeichen einerley Exponenten hat, in die Grösse, die vorhin unter dem Wurzelzeichen stand, multiplicirt, d. i. wenn man das Verfahren von (24) rückwärts macht.

$$10\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5000}$$

27. Aufg. Wurzelgrössen zu addiren oder zu subtrahiren.

Aufl. Wenn sie wie (25) beschaffen sind, so multiplicirt man die Summe oder die Differenz der Zahlen vor den Wurzelzeichen in die gemeinschaftliche Wurzelgrösse. Auserdem werden die Arbeiten nur angezeigt.

$$\sqrt{63} \pm \sqrt{28} = (3 \pm 2).\sqrt{7}$$

28. Aufg. Wurzelgrössen mit einander zu multipliciren, wenn sie einerley Benennung haben, oder dazu gebracht worden sind (19).

Aufl. Man multiplicire die Zahlen unter den Wurzelzeichen mit einander, vor das Product schreibe man das gemeinschaftliche Wurzelzeichen, so hat man die Wurzelgrösse, welche das Product

der

der einzelnen Wurzelgrösse ist. Befänden sich Zahlen vor den Wurzelzeichen der Factoren (25) so muß man auch das Product dieser Zahlen in die Wurzelgrösse multipliciren, welche das Product ausdrückt. Der Beweis erhellet aus (21)

$$a.\sqrt[m]{b}.c.\sqrt[n]{d} = a.\sqrt[mn]{b^n}.c.\sqrt[mn]{d^m} = ac.\sqrt[mn]{b^n d^m}$$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{9}+\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{4} = 3-2 = 1$ wie aus Ar. II. 5. 3 Ex. folgt.

29. Aufg. Zwo einzelne Wurzelgrössen von einerley Benennung mit einander zu dividiren.

Aufl. Man dividire die Grössen unter den Wurzelzeichen, der Quotient, unter das Wurzelzeichen geschrieben, gibt die Grösse, die aus der Division herauskömmt. Befänden sich vor den Wurzelzeichen des Divisors oder Dividendus Factoren, so wird ihr Quotient auch ein Factor des nur erwähnten Quotienten. (22)

$$\frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$$

30. Anm. Man kann hieraus die Regeln der Division für zusammengesetzte Wurzelgrössen vermöge (6) herleiten, wenn man sie nöthig hat.

31. Lehrs. Von einer verneinten Grösse sind alle Potenzen bejaht, deren Exponenten gerade sind, und alle verneint, deren Exponenten ungerade sind.

Bew. Sie sey $-e$ so ist $(-e)^2 = -e.-e$ $= +e^2$ (Ar. I; 105) also $(-e)^3 = +e^2.-e$ $= -e^3$ (Ar. I, 103.) und $(-e)^4 = -e^3.-e = +e^4$ und $(-e)^5 = +e^4.-e = -e^5$ und so wechseln die Zeichen der Potenzen ab, weil jede mit der verneinten Wurzel multiplicirt, die nächst höhere gibt. Diese nächst höhere ist also verneint oder bejaht, nachdem die multiplicirte bejaht oder verneint war, und da also die erste Potenz, oder die Wurzel selbst verneint ist, so müssen alle geraden bejaht, alle ungeraden verneint seyn.

32. Zus. Die Wurzel eines ungeraden Exponenten hat einerley Zeichen mit ihrer Potenz; z. E. $\sqrt[3]{8} = +2$ und $\sqrt[3]{-8} = -2$; Aber eine gerade Potenz hat zwo gleiche und entgegengesetzte Wurzeln, $\sqrt{9}$ ist so wohl $+3$ als -3.

33. Zus. Wer eine Wurzel eines geraden Exponentens aus einer verneinten Grösse zu ziehen fodert, der fodert etwas unmögliches, denn es gibt keine verneinte Grösse, die eine solche Potenz wäre.

34. Erkl. Solche Wurzelgrössen (33) heissen unmögliche (imaginariae).

35. Zus. Der allgemeinste Ausdruck solcher Grössen ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\sqrt[2n]{-e} = (-e)^{\frac{1}{2n}} \text{ (Ar. II. 9)} = [(-e)^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{(Ar. II. 8)} = \sqrt{(-e)^{\frac{1}{n}}} \text{ (Ar. II. 9)} = \sqrt{(\sqrt[n]{-e})}.$$

Hier

Hier ist aus (31) $\sqrt[n]{-e}$ eine mögliche verneinte Grösse, wenn n ungerade, aber eine unmögliche Grösse, wenn n gerade ist. (33) Man kann also alle unmögliche Grössen als Quadratwurzeln ansehen, die entweder aus möglichen verneinten Grössen, oder aus unmöglichen gezogen werden sollen.

36. Zus. Wenn die unmögliche Grösse eine Quadratwurzel aus einer möglichen verneinten Grösse ist, welcher Fall am häufigsten vorkömmt, so ist ihr Quadrat diese verneinte Grösse. Soll also dieses Quadrat durch die Multiplication der unmöglichen Grösse mit sich selbst nach (28) gefunden werden, so muß man die negative Wurzel nach (32) nehmen. $(\sqrt{-a})^2 \equiv \sqrt{-a}.\sqrt{-a}$ gibt nach (28) $\sqrt{+a^2}$ d. i. $+a$ oder $-a$ (32) da man also hier $-a$ nimmt.

Einige Anwendungen der Buchstabenrechnung.

37. Aufg. Die Eigenschaften der Summen, Producte, u. s. w. gerader und ungerader Zahlen zu finden.

Aufl. Wenn n, m, ganze Zahlen bedeuten, so läßt sich jede gerade Zahl durch $2n$ oder $2m$; jede ungerade durch $2n-1$; $2m+1$ ausdrücken. So erhellt gleich, daß die Summe einer geraden und ungeraden Zahl oder $2m+2n-1$ ungerade; die Summe zwoer ungeraden $2m+1+2n-1 = 2m+2n$ gerade ist.

Mit den Unterschieden verhält es sich auch so. Das Product einer ungeraden durch eine gerade, muß gerade seyn, denn der gerade Factor, und folglich das ganze Product läßt sich mit 2 dividiren. Aber zwo ungerade $(2m + 1).(2n-1)$ geben $2n.(2m + 1) - 2m-1$ ungerade; u. s. w. Der ganze Kunstgriff bestehet in einer geschickten Bezeichnung beyder Arten von Zahlen.

38. Zus. Wenn die erste ungerade Zahl $= 1$; so ist die zweyte $3 = 1 + 2.1$ die dritte $5 = 1 + 2.2$; die vierte $7 = 1 + 3.2$ und so die $m + 1$te $= 2m + 1$; oder auch $2m + 2 - 1 = 2.(m + 1) - 1$

39. Aufg. Den Unterschied zweyer Quadrate zu finden, deren Wurzeln um 1 unterschieden sind.

Aufl. Wenn die Wurzeln n; $n + 1$; heissen, so sind die Quadrate n^2; und $n^2 + 2n + 1$; also ist ihr Unterschied $2n + 1$; die $n + 1$te ungerade Zahl;

40. Zus. Sind die Wurzeln n, nach der Reihe die natürlichen Zahlen 0; 1; 2; 3; u. s. w. so ist für $n = 0$; $n + 1 = 1$; der Ueberschuß des Quadrates von 1 über das von 0, die erste ungerade Zahl; für $n = 1$; $n + 1 = 2$; der Ueberschuß des Quadrates von 2 über das von 1 die zweyte ungerade Zahl; für $n = 2$; $n + 1 = 3$; der Ueberschuß des Quadrates der 3 über das von der 2 die dritte ungerade Zahl, u. s. w. Addirt man also die erste ungerade

Zahl

Zahl zu der zweyten, so hat man das Quadrat der 2; addirt man dazu die dritte, so hat man das Quadrat der 3 und so ist jedes Quadrat die Summe so vieler ungeraden Zahlen, als seine Wurzel Einheiten hat.

41. Zus. Jedes Quadrat läßt sich durch n^2 ausdrücken; dieses ist also ein allgemeines Glied in der Reihe der Quadrate, (9) und drücket das nte Quadrat aus, wenn 1 das erste ist; das nächstfolgende $(n+1)$te Quadrat wird erhalten, wenn man in das allgemeine Glied $n+1$ statt n setzt. Dieses ist ein Beyspiel, wie man das allgemeine Glied einer Reihe brauchen kann, jedes Glied, oder auch allgemein, jede zwey nächstfolgende, zu finden.

42. Zus. Das nte Quadrat vom nächstfolgenden $(n+1)$ten abgezogen gibt einen Unterschied, und diese Unterschiede machen wieder eine Reihe, deren allgemeines Glied $2n+1$ ist. (39) Nimmt man also 1 für das erste Quadrat an, so gibt $4-1=3$ in dieser Reihe der Unterschiede das erste Glied, welches man erhält, wenn in dem Ausdrucke des allgemeinen Gliedes $n=1$ gesetzt wird. So gibt $n=2$, das zweyte Glied 5 dieser Reihe der Unterschiede, u. s. w. daß $2n+1$ überhaupt das nte Glied bedeutet. Nähmlich $n+1$ Glieder in der Reihe der Quadrate, geben n Glieder in der Reihe der Unterschiede. Wenn man also in dem allgemeinen Gliede der Reihe der Unterschiede, $n+1$ statt n setzt, so be-

kömmt man dieser Reihe (n + 1)tes Glied, = 2n + 3; und der Unterschied dieser beyden nächst nach einander folgenden Unterschiede, ist ein allgemeines Glied einer Reihe die herauskömmt, wenn man jeden Unterschied in der ersten Reihe der Unterschiede von seinen nächstfolgenden abzieht, das ist, ein Glied einer zweyten Reihe, von Unterschieden. Es ist aber = 2 daß also diese zweyte Reihe für jedes Glied 2 bekömmt, wie gleich daraus leichter erhellt, daß die ersten Unterschiede ungerade Zahlen sind. Meine Absicht war nur hiedurch den Gebrauch des allgemeinen Gliedes zu erläutern.

Zweyte Unterschiede	Erste Unterschiede	Quadrate	Wurzeln
		+ 25	— 5
	— 9	+ 16	— 4
+ 2	— 7	+ 9	— 3
+ 2	— 5	+ 4	— 2
+ 2	— 3	+ 1	— 1
+ 2	— 1	0	0
+ 2	+ 1	+ 1	+ 1
+ 2	+ 3	+ 4	+ 2
+ 2	+ 5	+ 9	+ 3
+ 2	+ 7	+ 16	+ 4
+ 2	+ 9	+ 25	+ 5

In der Tafel sind die Reihen auch für negative Wurzeln angezeigt, da sie hinaufwärts wie hinunter-

terwärts ohne Ende gehen. Man kann also nach Gefallen in der Reihe der Quadrate, welches Glied man will, für das erste nehmen, nimmt man wie in (42) das Quadrat von + 1 für das erste Glied der Reihe der Quadrate, das von + 2 für das zweyte, das von + 3 für das dritte u. s. f. an, so wird das Quadrat von o, das ote Glied, das Quadrat von — 1 das — 1 Glied, das Quadrat von — 2 das — 2 Glied u. s. w. wenn nähmlich die Zahl, die anzeigt, das wievielte Glied eines ist, verneint wird, so bedeutet solches, daß dieses Glied, vom Anfange der Reihe, von dem willkührlich angenommenen ersten Gliede rückwärts liegt.

43. In diesem Falle sind + 3; + 5; + 7; u. s. w. das erste, zweyte, dritte, u. s. w. Glied in der Reihe der Unterschiede, also sind in dieser Reihe + 1; — 1; — 3; — 5; das ote; das — 1te; das — 2te, das — 3te u. s. w. Glied. Man bekömmt auch wirklich diese Zahlen, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke des nten Gliedes der Reihe der Unterschiede (42) nach und nach $n = o$; — 1; — 2; — 3; setzt. Z. E. für $n = -3$ wird er $-3.2+1 = -5$.

44. Zus. Alle Quadrate, nach der Reihe, ohne Multiplication zu finden, darf man nur die ungeraden Zahlen nach der Reihe addiren (40) und wenn man zu einem Quadrate seine doppelte Wurzel und noch 1 addirt, so hat man das nächstfolgende, (42) Z. E. Es sey $n = 1000$ so ist $1001^2 = 1000^2 + 2.1000 + 1 = 10002001$; Nun sey $n = 1001$ so

ist $1002^2 = 1001^2 + 2.1001 + 1 = 1004004$ u. s. w.

45. Aufg. Den Unterschied der Cubikzahlen von m und von $m + 1$ zu finden.

Aufl. Weil $(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$ (Ar. IIII. 28.) so ist er $3m^2 + 3m + 1$.

46. Zus. In diesem allgemeinen Gliede der Reihe der ersten Unterschiede, setze man $m + 1$ statt m, so hat man das nächstfolgende $3.(m+1)^2 + 3(m+1) + 1 = 3m^2 + 9m + 7$ und jenes von diesen abgezogen gibt $6m + 6$ für ein allgemeines Glied der Reihe der zweyten Unterschiede.

47. Zus. In diesem setze man wieder $m + 1$ statt m, sein nächstfolgendes $6.(m+1) + 6 = 6m + 12$ zu erhalten, davon das nächstvorhergehende abgezogen das allgemeine Glied der dritten Reihe der Unterschiede gibt, das also durchgängig $= 6$ ist.

48. Zus. Vier nach einander folgende Würfel, geben drey erste Differenzen, (45) daraus findet man zwo zweyte (46) und aus diesen beyden eine dritte, welche allemahl 6 ist, (47) addirt man also 6 zu der untersten zweyten Differenz, so hat man eine neue zweyte, welche zu der untersten ersten addirt eine neue erste gibt, und diese zu dem untersten Würfel addirt, gibt einen neuen Würfel. So seyen die vier Würfel 1; 8; 27; 64; die drey ersten Unterschiede 7; 19; 37; die beyden zweyten 12; 18; der dritte unveränderliche 6 man findet alsdenn

18 + 6 = 24; 37 + 24 = 61; 64 + 61 = 125; Nimmt man nun für die vier Würfel; 8; 27; 64; 125; an, deren erste Unterschiede, 19; 37; 61; die zweyten 18; 24; sind, so ist 24 + 6 = 30; 61 + 30 = 91; 125 + 91 = 216 und so kann man alle Würfel nach der Reihe durch die Addition finden.

III. Unt.	II. Unt.	I. Unt.	Würfel	Wurzeln
			1	1
		7	8	2
	12	19	27	3
6	18	37	64	4
6	24	61	125	5
	30	91	216	6
	36	127	343	7
	42	169	512	8

Man kann diese Reihen wie bey dem Quadrate hinaufwärts fortsetzen, wo die Würfel verneint werden.

49. Anm. Nach 44; 48; lassen sich Quadrat- und Cubiktafeln verfertigen, und die verfertigten prüfen. (Ar IIII. 44.)

50. Anm. Wenn so statt der Wurzeln die natürlichen Zahlen nach der Ordnung genommen werden, so hat die Reihe vierter Potenzen vier Unterschiede, deren letzter beständiger = 4. 3. 2. 1 = 24 ist; und der fünfte Unterschied der fünften Potenzen ist 5. 4. 3. 2. 1 = 120 u. s. w.

51. Aufg. Alle mögliche Versetzungen einer gegebenen Menge von Dingen, die ich durch Buchstaben andeuten will, zu finden.

Aufl. Zwey Dinge haben zwo Ordnungen ab; ba. kömmt dazu das dritte, so kann es in jeder Ordnung drey Stellen, hinten, mitten, vorne, einnehmen, also haben drey Dinge 3. 2 = 6 Ordnungen abc; acb; cab; bac; bca; cba; In jeder dieser Ordnungen kann das vierte Ding vier Stellen einnehmen, die hinterste; zwischen den beyden letzten; zwischen beyden ersten; die vorderste; z. E. abcd, abdc; adbc; dabc; also haben vier Dinge 4. 6= 24 Ordnungen. In jeder derselben gibt es fünf Stellen für das fünfte Ding; drey; da es allemahl zwischen ein Paar der vorigen vier zu stehen kömmt, eine hinten, und eine vorne, als abcde; abced; abecd; aebcd; eabcd; also haben fünf Dinge 5. 24 = 120 Ordnungen. Ueberhaupt sind bey jeder Ordnung von n-1 Dingen für das nte das dazu kömmt, n-2 Stellen, jede zwischen einem Paare dieser Dinge; eine hinten, und eine vorne, also n Ordnungen, oder die Zahl der Ordnungen von n-1 Dingen, muß mit n multiplicirt werden, die Zahl der Ordnungen von n Dingen zu finden. Ist also jene Zahl (n-1).(n-2).(n-3)...3.2.1. so ist diese n (n-1).(n-2).(n-3)...3.2.1. Aber das erste findet in den berechneten Fällen statt, d. z. E. für n-1 = 5, die Zahl 5. 4. 3. 2. 1 ist; also wird sie bey sechs Dingen 6. 5. 4. 3. 2. 1 seyn. Nun setze man n — 1 = 6; so folgt eben so, daß sie bey sieben Dingen 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 ist, u. s. w.

45. Lehrs. Jede Potenz der 2 ist grösser als ihr Exponent.

Bew.

Bew. Daß $2^1 \leqslant 1$; $2^2 \leqslant 2$; $2^3 \leqslant 3$ fällt in die Augen. Wenn nun daraus, daß der Satz von einer gewissen Potenz angenommen wird, seine Richtigkeit für die nächst höhere fließt, so wird er allgemein wahr seyn; denn alsdenn fließt daraus, daß er für die dritte wahr ist, seine Richtigkeit für die vierte, und nun daraus daß er für die vierte wahr ist, seine Richtigkeit für die fünfte, u. s. w. Gesetzt nun, er sey für die Potenz r wahr, oder es sey $2^r \leqslant r$; so ist $2^r . 2$ oder $2^{r+1} \leqslant 2r$; Aber wenn $r \leqslant 1$ so ist $2r \leqslant r + 1$; folglich $2^{r+1} \leqslant r + 1$; d. i. wenn der Satz für die Potenz r wahr ist, so ist er auch für die Potenz $r + 1$ wahr.

46. Lehrs. Wenn man von einer Grösse a; die Hälfte, und von dieser Hälfte wieder die Hälfte, und von dieser zweyten Hälfte, (dem Viertheile) wieder die Hälfte und von dieser dritten Hälfte (dem Achttheile) wieder die Hälfte, u. s. w. nimmt, so ist es allemahl möglich eine Anzahl von Halbirungen zu bestimmen, durch die man auf eine Grösse kömmt, die kleiner ist als jede nach Gefallen angegebene Grösse; c.

Bew. Man nimmt an, daß c sich mit a vergleichen lasse, und daß also c etliche mahl genommen, etwas grösseres als a werden kann; m sey eine solche ganze Zahl, die $m\,c \leqslant a$ macht; so ist $\frac{a}{2^m} \leqslant \frac{mc}{2^m}$; aber $m \leqslant 2^m$ (45) folglich $\frac{mc}{2^m} \leqslant c$

oder

oder $\frac{a}{2^m} \leqslant c$; das heißt, man kömmt durch m Halbirungen, auf einen Theil von a der kleiner als c ist.

Oft wird man durch viel weniger Halbirungen auf einen solchen Theil kommen: Aber hier ist genug, die Möglichkeit, daß man auf einen solchen Theil kommen könne, gewiesen zu haben.

Ex. Wenn $a = 1000000$; $c = 3$, so ist $\frac{1000000}{3} = 333333\frac{1}{3}$ also $m = 333334$; durch so viel Halbirungen der Million kömmt man nach dem Beweise gewiß zu einer Zahl, die weniger als 3 ist. Aber eine viel geringere Menge Halbirungen, n, die solches thut, läßt sich so finden: Es soll $\frac{1000000}{2^n} \leqslant 3$ seyn. Folglich die Logarithmen genommen $6 \cdot n\, l\, 2 \leqslant l\, 3$ (Nr. VI. 20; 21;) oder $\frac{6 \cdot l\, 3}{l\, 2} \leqslant n$ der Quotient aber ist $\frac{5,5228788}{0,301} = 18,..$ Man wird also diese Absicht schon durch 19 Halbirungen erreichen.

47. Anm. Dieser Satz ist Euklidens I. S. des X B. und der wahre Grund der Schlüsse, die man jetzo durch die Ausdrückungen des Unendlichkleinen abzukürzen pflegt, deßwegen ich seinen Beweis überzeugend vorzutragen gesucht habe.

48. Zus. Es ist allemahl möglich eine bestimmte Potenz von $\frac{1}{2}$ zu finden, die kleiner ist, als jeder vorgegebene Bruch. Denn das Quadrat von $\frac{1}{2}$ ist die Hälfte der Wurzel, und jede folgende Potenz

tenz die Hälfte der vorhergehenden. (Ar. I. 76.) Folglich heißt diese Potenzen machen; $\frac{1}{2}$ beständig weiter fort halbiren, und man erhält die angezeigte Absicht durch eine bestimmte Anzahl solcher Halbirungen oder Potenzen. (46)

49. Zus. Dieses gilt noch vielmehr von einem Bruche, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, weil von diesem jede folgende Potenz weniger als die Hälfte der nächstvorhergehenden ist.

50. Zus. Jeder eigentliche Bruch, der 1 zum Zähler hat, ist kleiner als $\frac{1}{2}$ wenn er nicht selbst $\frac{1}{2}$ ist; und so gilt 49 von jedem solchen Bruche.

Die Algebra.

51. Erkl. Die Algebra lehret unbekannte Grössen, aus gegebenen Eigenschaften derselben, durch Gleichungen finden.

52. Erkl. Eine Gleichung heißt ein doppelter Ausdruck einerley Grösse; z. E. $7 \cdot 3 = 30 - 9$ Glieder von ihr heissen die Theile, die mit + und — zusammenhängen wie (2) als hier 7, 3 und 30, 9;

53. Zus. Es bleibt noch eine Gleichung, wenn man ein Glied, das auf einer Seite des Zeichens der Gleichheit addirt ist, auf beyden abzieht, oder das auf einer abgezogen ist, auf beyden addirt (Ar. I. 88) Das ist: Es bleibet eine Gleichung, wenn man ein Glied von einer Seite des Zeichens der Gleichheit

mit

mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere bringt.

$$\begin{array}{rl|rl} 7.3 &= 30-9 & 57 &= 30+27 \\ +9 &= +9 & -27 &= -27 \\ \hline 7.3+9 &= 30-9+9 & 57-27 &= 30+27-27 \\ &= 30 & &= 30 \end{array}$$

54. Zus. So kann man alle Glieder einer Gleichung auf eine Seite bringen, daß auf der andern o steht; z. E. $57 - 27 - 30 = o$

55. Zus. Auch bleibt eine Gleichung (Ar. I. 88.) wenn alle Glieder mit einerley multiplicirt oder dividirt werden. Aus $7.3 + 9 = 30$ folgt $\frac{7.3}{3} + \frac{9}{3}$ $= \frac{30}{3}$ oder $7 + 3 = 10$ imgleichen $7.3.5 + 9.5$ $= 30.5$.

56. Zus. Wenn sich in einem oder andern Gliede der Gleichung eine unbekannte Grösse als Divisor befindet, so kann sie durch die Multiplication (55) aus dieser Stelle des Divisors weggeschaffet werden $\frac{12}{x} = 3$ gibt $12 = 3x$.

57. Erkl. Coefficienten der unbekannten Grösse, heissen die bekannten, die in sie multiplicirt sind, wie 3 bey $12 = 3x$.

58. Erkl. Eine einfache Gleichung heißt, in welcher die unbekannte Grösse nicht höher als auf

die

die erste Potenz steigt, nachdem man der Gleichung die Gestalt gegeben hat, daß die unbekannte Grösse nirgends ein Divisor ist (56).

59. Aufg. Wenn in einer einfachen Gleichung lauter bekannte Grössen, bis auf eine einzige unbekannte angenommen werden, diese unbekannte zu finden.

Aufl. Man bringe alle Glieder, in denen sich die unbekannte Grösse befindet, allein, auf eine Seite (53). Man rechne ihre Coefficienten (57) zusammen, wie es die Zeichen + und — erfodern, und sehe, was sie zusammen geben, als einen einzigen Factor an, der in das Unbekannte multiplicirt wird: So hat man ein Product aus einem bekannten Factor in einen unbekannten, und dasselbe ist einer völlig bekannten Grösse, nähmlich der Grösse auf der andern Seite gleich. Folglich findet man das Unbekannte, wenn man die Grösse auf der andern Seite mit dem bekannten Factor dividirt.

Exempel. Man sucht eine Zahl, deren Hälfte, Drittheil und Viertheil zusammen, 1 mehr betragen, als die Zahl selbst. Sie heisse y so ist $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}y = y + 1$ folglich (53) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}y - y = 1$ also (59) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1).\ y = 1$ oder (Ar. I. 74) $(\frac{13}{12} - 1)\ y = 1$ oder $\frac{1}{12}.\ y = 1$ oder $y = 12$ Probe $\frac{1}{2}\ y = 6;\ \frac{1}{3}\ y = 4;\ \frac{1}{4}\ y = 3;$ und $6 + 4 + 3 = 12 + 1$.

60. Willk. S. Wenn man die Grössen mit Buchstaben ausdruckt, so brauche man die ersten Buchstaben des Alphabetes für die bekannten, und die letzten für die unbekannten. Dieses geschieht nur der Bequemlichkeit wegen, damit man während der Rechnung gleich sieht, was man sucht, und kann also nach Gefallen geändert werden.

61. Aufg. Drey unbekannte Grössen x; y, z, befinden sich in drey einfachen Gleichungen A; B; C; nach Gefallen mit einander vermengt, doch so, daß nirgends eine mit der andern multiplicirt ist. Man soll eine nach der andern finden.

Aufl. Man suche den Werth von x als wenn alles übrige bekannt wäre, (59) so wohl aus A als aus B; jeder dieser Werthe ist also durch y; z, und bekannte Grössen gegeben. Beyde Werthe gleich gesetzt, geben eine neue Gleichung D; die nur y; z; und bekannte Grössen enthält: aus ihr suche man eben so den Werth von y durch z und bekannte Grössen; Enthält nun C nur y, z, und bekannte Grössen, so kann man eben so einen Werth von y aus C suchen, und beyde gleich gesetzt geben eine Gleichung E wo z alleine unbekannt ist, und folglich nach (59) gefunden wird. Wäre aber auch x in C enthalten, so könnte man in C statt seiner, einen seiner vorhin durch y und z gefundenen Werthe setzen, und so C zu der Gestalt, daß sie nur y und z enthält, bringen.

Hat

Hat man z aus E durch lauter Bekanntes gefunden, so setze man seinen völlig bekannten Werth in den Werth von y bey E; und finde dadurch y auch durch lauter Bekanntes; und diese Werthe von y, z. brauche man beyde, oder einen allein in einer der ersten drey gegebenen Gleichungen, die x enthält, nachdem in dieser Gleichung sowohl y als z, oder nur eines von beyden vorkömmt, so gibt sich auch x durch lauter Bekanntes.

Exempel. Man soll drey Zahlen daraus finden, daß die Summe jedes Paares von ihnen gegeben wird. Hier ist also (61)

A) $x + y = a$; B) $x + z = b$; C) $y + z = c$

also $x = a - y = b - z$ D) und aus (39)

$y = a - b + z = c - z$ E) also (39) $2z = c - a + b$ und (45)

$z = \frac{c - a + b}{2}$; daher bey E) $c - z = \frac{2c - c + a - b}{2}$

(Ar. I. 79 und 100) $= \frac{c + a - b}{2} = y$ und nun bey

D; $a - y = \frac{2a - c - a + b}{2} = \frac{a - c + b}{2} = x$;

Es sey $a = 9$; $b = 10$; $c = 13$; so ist

$x = \frac{9 - 13 + 10}{2} = 3$; $y = \frac{13 + 9 - 10}{2} = 6$;

$z = \frac{13 - 9 + 10}{2} = 7$; und $3 + 6 = 9$; $3 + 7 = 10$;

$6 + 7 = 13$;

62. Anm. Daß keine der unbekannten Grössen in die andere multiplicirt seyn soll, wird erfodert, weil

sonst D und E nicht einfache Gleichungen würden, wie die Folge Exempel zeigen wird.

63. Anm. Man sieht leicht, wie auf eben die Art nur bey zwo Gleichungen und so viel unbekannten Grössen, oder bey mehrern als drey, verfahren wird; wie auch daß man alle unbekannte Grössen wird finden können, wenn man soviel Gleichungen hat, als ihrer sind.

64. Aufg. Aus den gegebenen Tagereisen zweener Boten und der Zeit, wie lange der erste weg ist, ehe der andre ihm nachgeht, zu finden, wenn er ihn einhohlet.

Aufl. Des ersten Tagereise heisse a; des zweyten b; die gegebene Zeit = c; die gesuchte Zeit, vom Ausgange des letzten an gerechnet = x; so legt der erste Bote in der Zeit c den Weg ca zurück, ehe ihm der andere nachgeht, und den Weg ax während der Zeit, daß ihm der andere nachgeht, also zusammen den Weg ac + ax, aber der andere legt während der Zeit, daß er geht, den Weg bx zurücke, welcher des ersten Boten Wege gleich seyn muß. Daher ist Q) ac + ax = bx; oder ac = bx − ax

oder ac = (b - a). x oder $\frac{ac}{b-a} = x$.

Ex. a = 6; b = 8; c = 4; $x = \frac{6.\ 4}{8-6} = 12$

Probe. In 12 Tagen legt der zweyte Bote 12. 8 = 96 Meilen zurücke; der erste aber in 4 + 12 = 16 Tagen; 16. 6 = 96 Meilen.

65. Zus.

65. Zus. Wird die Zeit des Einhohlens gegeben, und dagegen die Tagereise des zweyten Botens gesucht, so sieht man x als bekannt, und b als gesucht an; folglich wird aus der Gleichung Q nun

$$\frac{ac + ax}{x} = b = \frac{ac}{x} + a$$

66. Anm. Der Begriff der Boten hat in die Rechnung keinen Einfluß, und die Frage liesse sich allgemein so abfassen: aus den Geschwindigkeiten zweener Körper, die sich gleichförmig bewegen, und der Zeit, wie lange der erste vorausgelaufen ist, zu finden, wenn ihn der andere einhohlt.

67. Aufg. Die Preise von der Kanne zwoer Arten von Weine sind gegeben: Man fragt, wie viel von jedem zu einer Kanne vermischten Weines muß genommen werden, die man für einen mittlern gegebenen Preis verkaufen will.

Aufl. Die Kanne = 1 des guten Weins, gelte a; des schlechten b; des vermischten c; und von dem schlechten befinde sich in der Kanne der Theil x; also vom guten der Theil 1-x. So ist der Wehrt des schlechten Weines in der vermischten Kanne = bx; des guten a. (1-x) = a-ax; also bx + a-ax = c oder (b-a). x = c-a. Hier sind beyde Glieder negativ, weil a grösser als b und als c ist; Also bleibt noch eine Gleichung, wenn man sie beyde positiv macht, welches eben soviel ist, als ob man jedes auf die entgegengesetzte Seite brächte.

Folglich ist (a — b). x = a — c und $x = \frac{a-c}{a-b}$

Ex. Wenn $a = 16$; $b = 10$; $c = 12$; so ist

$$x = \frac{16 - 12}{16 - 10} = \frac{2}{3}$$

68. Zus. Nähme man statt des schlechten Weins, Wasser, so würde $b = o$ und die Menge des Wassers $\frac{a - c}{a}$

69. Zus. Die Aufgabe lehret überhaupt zwey Dinge von gegebenen Werthe so vermischen, daß ein gegebener mittlerer Werth herauskömmt. Gesetzt, man wolle funfzehnlöthiges und neunlöthiges Silber so vermischen, daß dreyzehnlöthiges herauskommen soll. Weil die Mark = 16 Loth hier 1 heissen muß, und das löthige der Werth des Silbers ist, so ist $a = \frac{15}{16}$; $b = \frac{9}{16}$; $c = \frac{13}{16}$ also die Menge des schlechten Silbers $= \frac{15 - 13}{16} : \frac{15 - 9}{16} =$ $\frac{1}{3}$ und des bessern $= \frac{2}{3}$; Nähmlich $\frac{2}{3}$ einer Mark funfzehnlöthiges Silber halten an feinem Silber $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{10}{16}$ einer Mark und $\frac{1}{3}$ einer Mark neunlöthiges hält $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$ einer Mark; also halten die beyden Silber zusammen $\frac{10 + 3}{16}$ fein Silber.

Dieses wird die regula alligationis genannt, und beym Münzwesen und Silberarbeiten mit Nutzen gebraucht. S. Schlüters Unterr. von Hüttenwerken im Probierbuche 33. C.

70. Erkl. Eine bestimmte Gleichung (determinata) heißt, wo nur eine unbekannte Grösse gesucht wird.

71. Anm. Die unbekannte Grösse wird nähmlich durch die übrigen, die alle gegeben sind, so bestimmt, daß es nur einen Werth oder nur eine bestimmte Menge von Werthen für sich gibt, wie die Folge zeigen wird. (223)

72. Erkl. Eine höhere bestimmte Gleichung ist die, in welcher die unbekannte Grösse auf eine höhere Potenz als auf die erste erhoben ist. Der Grad dieser Potenz ist auch der Grad der Gleichung, welche quadratisch, cubisch, vom funften Grade, u.s.f. heißt, nachdem das Quadrat, der Würfel, die fünfte Potenz, der unbekannten Grösse in ihr befindlich sind.

73. Erkl. Eine bestimmte Gleichung ist rein oder unrein (pura vel adfecta) nachdem sich in ihr blos die höchste Potenz der unbekannten Grösse, die ihrem Grade gemäß ist, oder dabey noch niedrigere befinden.

74. Erkl. Die Wurzel (Radix) einer Gleichung heißt der Werth der unbekannten Grösse in ihr. Ihn finden, heißt die Gleichung auflösen.

75. Aufg. Eine reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Ihr allgemeiner Ausdruck ist $z^2 = f$ folglich $z = \pm\sqrt{f}$ (32)

76. Aufg. Aus der Summe (a) zwoer Zahlen und ihrer Quadrate Summe, (b) die Zahlen zu finden.

Aufl. Der Zahlen halber Unterschied heisse y; so ist die grosse $= \frac{1}{2}a + y$ die kleine $= \frac{1}{2}a - y$ (Trig. 13 S.)
das Quadrat der grossen $= \frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$ (Ar. IIII; 1)
der kleinen $= \frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$ (Ar. II; 5; 2. Ex.)

Summe der Quadrate $= \frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$
also $y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$ folglich $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$
nähmlich wenn die eine $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$ so ist die andere $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{2}b - a^2)}$

Ex. Wenn $a = 10$; $b = 58$, so ist $y = \pm\sqrt{(29-25)} = \pm 2$ und die eine Zahl $5 + 2 = 7$ die andere $5 - 2 = 3$; Es ist aber $49 + 9 = 58$.

77. Zus. Wäre der Unterschied der Quadrate, c, gegeben, so fände sich $2ay = c$ oder $y = \frac{c}{2a}$

Z. E. wenn $a = 10$; $c = 40$; $y = \frac{40}{20} = 2$ wie vorhin.

78. Aufg. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Ihr allgemeiner Ausdruck ist G) $z^2 = pz + q$ wo p und q nach Gefallen bejahte und verneinte Grössen vorstellen können. Das Quadrat hat keinen Coefficienten, denn wenn es auch einen ge-

gehabt hätte, so liesse sich solcher doch durch die Division (55) wegschaffen. Man mache aus dieser Gleichung die H) $z^2 - pz = q$. Nun wäre $(z - \frac{1}{2}p)^2 = z^2 - pz + \frac{1}{4}p^2$ (Ar. II. 5.) addirt man also bey H auf beyden Seiten $\frac{1}{4}p^2$ oder das Quadrat des halben Coefficienten bey z; so bekömmt man

I) $z^2 - pz + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ oder
$(z - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ folglich (75)
K) $z - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$
und L) $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$

So geben G und L allgemeine Formeln, die man auf alle besondere Fälle anwenden kann, wenn p; q; gehörig bestimmt werden.

79. Aufg. Man suche zwo Zahlen, x; y; bey denen Product, Summe; und Unterschied der Quadrate; gleich sind;

Aufl. Also ist I) $x^2 - y^2 = xy$; II) $x + y = xy$; folglich III) $x + y = x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)$ (Ar. II. 5.) also (55) IIII) $1 = x - y$ oder (39) V) $1 + y = x$; daher in II; $1 + 2y = y + y^2$ oder VI) $y^2 = y + 1$; diese Gleichungen mit G (78) verglichen gibt $z = y$; $p = 1$; $q = 1$; also aus L) (78) $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + 1)} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ (21) und aus V) $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$; Man kann nähmlich nach Gefallen in den zusammengehörigen Werthen der gesuchten Grössen die beyden

obern Zeichen der Wurzelgrössen, oder die beyden untern brauchen.

Proben $x + y = 2 \pm \sqrt{5}$

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$\pm \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot 5$

Product $= 2 \pm \sqrt{5}$

$x^2 = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot 5$

$y^2 = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot 5$

Unterschied $= 2 \pm \sqrt{5}$

Von der Arithmetischen Progreßion.

80. Erkl. Eine Menge Zahlen die in gleichen zusammenhängenden arithmetischen Verhältnissen (Ar. V. 8.) fortgehen, machen eine arithmetische Reihe oder Progreßion aus.

81. Zus. Ist das erste Glied $= a$, der Unterschied $= d$; die Zahl der Glieder n; so ist

Z. d. G.	1;	2;	3;	4;	5;	n
	a;	$a+d$;	$a+2d$;	$a+3d$;	$a+4d$;	$a+(n-1)\cdot d$

82. Erkl. Die Progreßion steigt oder fällt (ascendit; descendit) nachdem die Glieder zu- oder abnehmen; Für die fallende ist d verneint.

83. Lehrs.

83. Lehrs. Die Summe des ersten und des letzten Gliedes; oder der beyden äuserſten Glieder ist so groß als die Summe jedes Paares Glieder, da das eine so weit vom Anfange entfernt ist, als das andere vom Ende.

Bew. Der beyden äuserſten Summe ist 2a + (n-1)d Nun ist das letzte ohne eines, oder das zweyte vom Ende gezählt = a + (n-2)d; weil es nähmlich eine Differenz d; weniger haben muß als das letzte; dieses Glied nun macht mit dem zweyten vom Anfange gezählt a + d, eben die Summe. Der Grund ist leicht zu sehen: das zweyte vom Ende hat einen Unterschied weniger als das letzte, und das zweyte vom Anfange einen mehr als das erste. Also haben die zweyten Glieder zusammen soviel Unterschiede als die beyden äuserſten. So geht es beständig fort; wenn man vom Ende um eine Stelle vorwärts geht, so verliert man einen Unterschied, und wenn man vom Anfange um eine Stelle nach dem Ende zu geht, so gewinnt man einen; daß also die Menge der Unterschiede zusammen in Stellen, die von den äuserſten gleich entfernt sind, allemahl einerley bleibt; und da jedes Glied aus dem ersten und einer Menge Unterschiede besteht, so ist die Summe zweyer solcher gleich entfernter Glieder allemahl einerley. Es sey ein Glied das rte vom Anfange; so ist es = a + (r-1) d. Ein anders sey das rte vom Ende; dieses muß also r-1 Unterschiede weniger enthalten als das letzte, denn das zweyte vom Ende enthält einen weniger, das dritte

zween, u. s. f. Es ist also $a + (n-1-(r-1))d = a + (n-r)d$ und beyder Summe ist der Summe der äuersten gleich.

84. Zus. Wenn die Zahl der Glieder ungerade ist, so ist das mittelste vom Anfange und vom Ende gleich entfernt, folglich sein Doppeltes auch der Summe der beyden äuersten gleich. In diesem Falle müssen vor dem mittelsten Gliede $\frac{n-1}{2}$ Glieder vorhergehen, und eben so viel nach ihm folgen, damit die Anzahl der vorhergehenden und folgenden, nebst dem mittelsten Gliede, zusammen n ist. Also ist das mittelste Glied das $\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$te und folglich $= a + \frac{n-1}{2}d$ dessen Doppeltes offenbahr der me der beyden äusern gleich ist.

85. Zus. Wenn die Zahl der Glieder gerade ist, und man allemahl ein Paar solcher von den äuersten gleich entfernter Glieder zusammen nimmt, so gibt es halb so viel Paare als Glieder sind. Multiplicirt man nun die Summe der beyden äuersten, durch die Zahl der Paare, d. i. durch die halbe Zahl der Glieder, so hat man die Summe aller. Das erste Glid sey also $= A$; das leßte $= V$; die Zahl der Glieder $= N$; die Summe aller, oder der Progreßion $= S$, so ist $S = (A + V.) \frac{1}{2} N$.

86. Zus. Bedeutet aber N eine ungerade Zahl, so gibt es $\frac{N-1}{2}$ Paare solcher von den äuersten gleich

ent-

entfernter Glieder, worunter das mittelste einzelne sich nicht befindet. Die Summe dieser $\frac{N-1}{2}$ Paare ist wiederum $(A+V).\frac{N-1}{2}$ und dazu muß man das mittelste einzelne addiren, die Summe der ganzen Progreßion zu haben: Aber dieses mittelste ist $\frac{A+V}{2}$ (84) also die Summe der Progreßion $(A+V)\frac{N-1+1}{2} = \frac{(A+V).N}{2}$ wie vorhin.

87. Zus. $V = A + (N-1).D$ wenn D den Unterschied bedeutet (81).

88. Zus. Wenn von den fünf Dingen A; D; V; N; S; drey gegeben sind, lassen sich die übrigen beyden daraus vermittelst der Gleichungen (87; 85;) finden (63)

89. Aufg. Aus dem ersten Gliede, der Zahl der Glieder, und dem Unterschiede; das letzte und die Summe zu finden.

Aufl. Sie ist den Gleichungen (87. 85.) enthalten.

90. Ex. Man verlangt die Summe der ersten 1000000 natürlicher Zahlen zu wissen. Hier ist $A = 1$; $D = 1$; $N = 1000000$; $V = 1000000$; $S = 1000001.\frac{1000000}{2} = 500\,000\,500\,000$.

91. Aufg. Die Summe von den ersten N ungeraden Zahlen zu finden.

Aufl.

Aufl. $A = 1$; $D = 2$; $V = 1 + (N-1) \cdot 2 = 2N-1$; und $S = (1 + 2N-1) \cdot \frac{1}{2} N = N^2$ (wie in 40)

So ist die tausendste ungerade Zahl $= 2000-1 = 1999$ und die Summe der ersten tausend ungeraden Zahlen $= 1000000$.

92. Aufg. Aus dem ersten und letzten Gliede, und dem Unterschiede, die Zahl und die Summe zu finden.

Aufl. Man suche N; S; Aus (87) ist $\frac{V-A+D}{D} = N$ folglich $S = \frac{A+V}{2} \cdot \frac{V-A+D}{D}$

93. Ex. $A = 2$; $V = 17$; $D = 3$; also $N = \frac{17-2+3}{3} = 6$; $S = \frac{17+2}{2} \cdot 6 = 19 \cdot 3 = 57$; die Progreßion ist nähmlich P, 2; 5; 8; 11; 14; 17;

94. Anm. Nähme man $V = 16$; das übrige wie vorhin, so käme $N = \frac{16-2+3}{3} = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$; die Bedeutung hievon ist diese: Man kann die arithmetische Verhältniß zwischen jeden nächst nach einander folgenden Gliedern, in kleinere theilen, wenn man zwischen diese Glieder Zah en in stetiger Proportion setzt; Wenn man zwischen 14 und 17 noch 15 und 16 setzte, so wären die arithmetischen Verhältnisse 14 zu 15; 15 zu 16; 16 zu 17; Drittheile der Verhältniß 14 zu 17; oder die Zahlen 14 und 15; 15 und 16; 16 und 17; lägen dreymahl näher beysammen, wenn man die Entfernung nach der arithmetischen Verhältniß durch den Unterschied mißt, als die Zahlen 14 und 17.

Ist

Ist also in der arithmetischen Reihe 14 die fünfte und 17 die sechste Zahl, rückt nähmlich eine Zahl um eine Stelle weiter fort, wenn sie von der nächst vorhergehenden um eine solche arithmetische Verhältniß unterschieden ist, wie in der Reihe für ein Ganzes angenommen wird, so muß die Stelle der 16 in dieser Reihe um $\frac{2}{3}$ des ganzen, das hier zum Maasse der Entfernungen zwischen zwey nächsten Gliedern angenommen wird, von der 14 entfernt, d. i. diese Stelle muß $5\frac{2}{3}$ seyn. So erhellt, daß N ein Bruch wird, wenn man zwischen die Zahlen die um ganze solche arithmetische Verhältnisse, wie D bestimmt, unterschieden sind, noch andere einschiebt.

In der Progreßion Q) 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; kämen alle Zahlen der Progreßion P vor; aber jede Verhältniß zwoer nächsten Zahlen in P ist in Q, in drey getheilt worden; oder die Verhältniß in P ist dreymahl so groß als die in Q; die Entfernung der 5; 8; 11; 16 vom ersten Gliede, sind 3; 6; 9; 14 in Q; aber 1; 2; 3; $\frac{14}{3}$ in P. und diese Entfernungen um 1 vermehrt, geben die Zahl des Gliedes weil die erste Entfernung zum zweyten Gliede, die zweyte zum dritten, u. so w. bringt.

95. Anm. Die gegebenen Dinge (88) können seyn 1) A;V;N; 2) A; V; D; 3) A; V; S; 4) A; N; D; 5) A; N; S; daß sich also fünf Aufgaben auflösen lassen, die alle durchzugehen nicht nöthig ist.

Von der geometrischen Progreßion.

90. Erkl. Wenn bey einer geometrischen Reihe (Ar. VI. 10.) das erste Glied = a; der Exponent = e; so ist ihr allgemeiner Ausdruck folgender:

Zahl der Glieder	1	2	3	4	...	n-2	n-1	n
						n-3	n-2	n-1
	a;	ea;	e^2a;	e^3a;		ea;	ea;	ea

97. Zus. Wenn das nte Glied $= u$ heißt, so gibt sich so gleich sein Ausdruck $u = e^{n-1} a$

98. Zus. Die Summe dieser aus n Gliedern bestehenden Reihe heisse f; so ist

$f = (1 + e + e^2 \ldots + e^{n-1})\, a$ dafür ich P. a schreiben will. Nun setze man in (7) $x = e$; $m = n-1$; so ist $P + \frac{e^n}{1-e} = \frac{1}{1-e}$; also $f = (\frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e}) . a = \frac{a - e^n a}{1-e} = \frac{a - ue}{1-e}$

99. Zus. Wenn die Progreßion fällt, oder die folgenden Glieder kleiner werden, so ist e ein eigentlicher Bruch, un in dem Ausdrucke $f = \frac{a-ue}{1-e}$ Zähler und Nenner positiv.

100. Zus. Wenn sie aber steigt, so ist e ein uneigentlicher Bruch, und der erwähnte Zähler und Nenner sind beyde negativ, aber doch ist der Quotient positiv, und bleibt unverändert, wenn man beyde positiv macht, oder hier $f = \frac{ue-a}{e-1}$ setzt.

101. Zus. Aus dem ersten Gliede, der Zahl und dem Exponenten, findet man durch die Gleichungen (97; 98 oder 100) unmittelbar das letzte und die Summe.

102. Zus. Diese Gleichungen lösen fünf Aufgaben auf wie in 95.

103. Zus. Wenn das zweyte Glied b heißt, so ist $e = \frac{b}{a}$ daß man also dadurch den Exponenten finden, und wegschaffen kann.

104. Ex. Einer Progreßion erstes Glied ist 2; das zweyte 6; man sucht das sechste, und die Summe der ersten sechs.

Hier ist $a = 2$; $b = 6$; $\frac{b}{a} = 3 = e$; $n = 6$;

$u = 3^5 . 2 = 486$; und aus (100) $f = \frac{1458 - 2}{3 - 1} =$ 728; die Progression ist 2; 6; 18; 54; 162; 486;

105. Aufg. Aus dem ersten Gliede, dem Exponenten, und dem letzten Gliede, die Zahl der Glieder zu finden.

Aufl. In (97) wird hier aus Ar. VI; 20; 21; $lu = (n-1)\,le + la$; also $lu - la = (n-1)\,le$ und $\frac{lu - la}{le} + 1 = n$

Hieher gehört Ar. VI. 33. drittes Ex. wo $n = 1$- $e = 2$; $u = 8192$; $n - 1 = x$.

106. Aufg. Eine Zahl zu finden, der die Summe der Reihe $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; . . . so weit man will fortgesetzt, so nahe als man will kommen, aber solche nie erreichen kann.

Aufl. Hier ist $= \frac{1}{2} =$ e und in 9% $f = \frac{1}{2}$.

$\frac{1-u}{\frac{1}{2}} = 1-u$. Die Summe so vieler Glieder als man auch zusammenrechnet, ist daher allemahl kleiner als 1; aber u kann kleiner werden als jede Grösse, die sich angeben läßt, (28) folglich kann man die Reihe allemahl so weit fortsetzen, daß die gefundenen Glieder zusammen addirt Etwas geben, das der Einheit so nahe kömmt als man will, oder von ihr um etwas geringers als jede Grösse, die sich angeben läßt, unterschieden ist, und die gesuchte Zahl ist also $= 1$.

107. Anm. Man trägt diese Auflösung insgemein folgender Gestalt vor: Wenn die Reihe ohne Ende fortgesetzt wird, so verschwindet das letzte Glied, oder dasjenige, das vom Anfange unendlich weit entfernt ist, läßt man es aber weg, so wird $f = 1$ welches also die Summe unendlich vieler Glieder dieser Reihe seyn wird. Es fällt in die Augen, daß dieses eben so viel sagen will, als in der vorigen Auflösung gesagt wurde.

108. Erkl. Wenn bey einer Reihe immer abnehmender Brüche, die Glieder nach und nach addirt, Etwas geben das sich einer gewissen Zahl immer nähert, und solcher wenn man mehr und mehr Glieder nimmt, so nahe kommen kann als man nur will, sie aber nie völlig erreichet, so sieht man die Reihe als unendlich weit fortgesetzt an, und heißt die erwähnte Zahl die Summe dieser unendlichen Reihe.

109. Aufg. Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe von Brüchen zu finden, da der Zähler des ersten Gliedes 1; und der Exponent der Verhältniß dem ersten Gliede gleich ist.

Aufl. Weil hier $c = a$; so ist $f = \frac{a}{1-a}(1-u)$

(98) aber u kann bey Fortsetzung der Reihe kleiner werden als jede Grösse, die sich angeben läßt, (50)

also ist die Summe $= \frac{a}{1-a}$

So sind die Summen von

$\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81} \ldots = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{256} \ldots = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{x}; \frac{1}{x^2}; \frac{1}{x^3}; \frac{1}{x^4} \ldots = \frac{1}{x-1}$

110. Zus. Wenn die Zeichen der Glieder in einer solchen Reihe abwechseln, wie in

A) $\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} \ldots$

so theile man sie in zwo. Die verneinten Glieder nähmlich geben für sich ohne Absicht auf das Zeichen die Reihe

C) $\frac{1}{y^2}; \frac{1}{y^4}; \frac{1}{y^6};$

und die bejahten Glieder geben die Reihe

B) $\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^5} \ldots = \frac{1}{y} \cdot (1 + C)$

Nun ist $A = B - C$ also $= \frac{1+C}{y} - C$ aber wenn man in (109) $a = \frac{1}{y^2}$ setzt, so findet sich $C = \frac{1}{y^2-1}$ folglich die Summe der Reihe $\frac{A=y^2}{y.(y^2-1)}$

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{y-1}{y^2-1} = \frac{1}{y+1}$$ (Ar. II. 5. III. Ex.)

111. Anm. Es ist klar, daß $A + 2C$ die Summe einer unendlichen Reihe gibt, die mit A einerley Glieder, aber alle bejaht hätte. Denn eine solche Reihe wäre $= B + C$ da die vorgegebe $B - C$ ist. Aber

$$A + 2C = \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y^2-1} = \frac{y-1+2}{y^2-1} = \frac{y+1}{y^2-1} = \frac{1}{y-1}$$

wie (109)

112. Zus. $\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} \ldots = \frac{1}{y+2} + \frac{1}{(y+2)^2} + \frac{1}{(y+2)^3} \ldots$ Denn in 109 sey $x = y + 2$ so ist $\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y+2-(y+2)^2} \ldots = \frac{1}{y+1}$ $= A$ (110) z. E. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \ldots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots$

113. Lehrs. Die Reihe der Unterschiede einer geometrischen Reihe (96) ist auch eine geometrische,

trische, die eben den Exponenten hat.

Bew. Die Reihe der Unterschiede ist

$(e-1).a; e.(e-1)a; e^2.(e-1)a \ldots e^{n-3}(e-1)a; e^{n-2}(e-1)a$ wo jedes folgende Glied mit dem vorhergehenden dividirt e gibt, wie in der Hauptreihe (96).

114. Zus. Wenn von diesen Unterschieden wieder Unterschiede genommen werden, so ist die zweyte Differenzreihe auch eine geometrische von eben dem Exponenten, und eben so die dritte oder die Reihe der Unterschiede der zweyten Unterschiede, und so hat jede geometrische Reihe ohne Ende fort lauter geometrische Reihen von Unterschieden.

Exempel.

Hauptreihe	1;	3;	9;	27;	81;	243
I. Unt.		2;	6;	18;	54;	162
II. Unt.			4;	12;	36;	108;
III. Unt.				8;	24;	72;
IIII. Unt. u. s. w.					16;	48;

115. Zus. Das erste Glied der zweyten Reihe der Unterschiede ist $(e-1)^2.a$; und also machen die ersten Glieder der Hauptreihe und der beyden ersten Differenzreihen eine zusammenhängende Proportion. Wenn die ersten Glieder, der Hauptreihe, und der Reihen der Unterschiede, nach der Ordnung p; q; r; s; t; heissen, so ist $p:q = q:r$; und weil man nun die erste Reihe der Unterschiede als eine Hauptreihe ansehen kann, (114) $q:r = r:s$ und nun die zweyte Differenzenreihe als eine Hauptreihe angesehen $r:s = s:t$ u. s. w. Also machen die ersten Glieder eine geometrische Reihe aus, deren Exponent e-1 ist.

Der Binomische Lehrsatz.

116. Aufg. Die vierte und fünfte Potenz einer zweytheilichten Wurzel zu finden.

Aufl. Man multiplicire den Würfel (Ar. IIII. 28)

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ mit}$$

der Wurzel $a + b$

---

giebt die $a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$
$+ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

---

vierte Pot. $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. d. mult.
mit $a + b$

---

giebt die $a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$
$+ a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$

---

fünfte Pot. $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

117. Zus. Auf eben diese Art lassen sich die höhern Potenzen nach der Reihe finden. Dieses gibt folgende Tafel:

$1a$	$1b$								
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$							
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$						
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$					
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$				
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$			
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$		
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$	
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	126^5b^4	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$

118. Zus. Bey jedem Theile einer Potenz, kann man auf zwey Dinge sehen; auf die Exponenten, welche die Theile der Wurzel darinnen haben, und auf den Coefficienten, d. i. auf die Zahl, mit welcher das Product aus den Theilen der Wurzel multiplicirt ist, z. E. im vierten Theile der fünften Potenz sind die Exponenten der Theile der Wurzel 2; 3; und der Coefficient ist 10.

119. Zus. Bey allen den Potenzen (117) ist das Gesetz der Exponenten folgendes: a hat im ersten Gliede der Potenz, mit der Potenz selbst einen Exponenten, und sein Exponent wird in jedem Gliede um 1 vermindert, bis er im letzten Gliede = o wird (Ar. II. 11.) der Exponent von b aber ist im ersten Gliede = o; im zweyten = 1 und wächst so in jedem folgenden Gliede um 1 bis er im letzten, den Exponenten der Potenz gleich wird.

Wenn dieses Gesetz bey irgend einer Potenz, deren Exponent m heissen mag, statt findet, so findet es auch bey der nächsthöhern, deren Exponent m + 1 heissen mag, statt. Denn man nehme dieses Gesetz von der erwähnten Potenz an. Man schreibe statt der Coefficienten, deren Gesetz wir jetzt noch nicht wissen, grosse Buchstaben, und setze also

$$(a + b)$$

$(a+b)^m = a^m + A\,a^{m-1}b + B\,a^{m-2}b^2 \ldots$
$+ O.\ a^{m-n+1}b^{n-1} + P a^{m-n}b^n + Q a^{m-n-1}b^{n+1}$

multiplicirt mit $a + b$ gibt

☾	a^{m+1}	$+A$	$a^m b$
		$+B$	$a^{m-1}b^2 \ldots$
	$+1$	$+A$	$\ldots\ldots$
♂	$+P$	$a^{m-n+1}b^n$	$+Q$ $a^{m-n}b^{n+1}$
	$+O$	$\ldots\ldots$	$+P$

Die oberste Zeile bey ☾ und bey ♂ stellt die niedrige Potenz mit a, die unterste mit b multiplicirt vor, wo man sich jede Zahl 1; A; .. P; mit in das Product der Potenzen von a und b multiplicirt vorstellen muß, das in der obern Zeile steht, so ist klar, daß das erste und das letzte Glied der höhern Potenz Producte aus dem ersten und dem letzten Gliede der niedrigern, in a und in b sind: Aber jedes mittlere Glied der höhern Potenz besteht aus zwey Stücken, aus einem Producte von a in ein gewisses Glied der niedrigern Potenz, und aus einem Producte von b in dieser niedrigern Potenz nächstvorhergehendes Glied, weil nähmlich dieses nächstvorhergehende Glied der niedrigern Potenz, b um einen Grad niedriger, und a um einen Grad höher enthielt als das nächstfolgende, so kommen einerley Abmessungen von a und b heraus, wenn man jenes mit a und dieses mit b multiplicirt, und also geben diese beyden Producte zusammen nur ein Glied der nächsthöhern Potenz, welches auch nur aus ihnen beyden allein bestehet, weil jedes andere Glied

der niedrigern Potenz mit den Theilen der Wurzel multiplicirt, andere Potenzen dieser Theile enthält. So geben die Glieder der niedrigern Potenz, die P und O zu Coefficienten haben, jenes mit a, dieses mit b multiplicirt, zusammen ein Glied der höhern Potenz und wiederum die, welche Q und P zu Coefficienten haben, da denn, wenn man die beyden nächstnacheinander folgenden Glieder der höhern Potenz betrachtet, die Exponenten von a ebenfalls beständig um 1 abnehmen, und die von b um 1 zunehmen. Also das angenommene Gesetz von jeder Potenz auf die nächst höhere folgt.

120. Zus. Es ist aber dieses Gesetz vermöge der Rechnung (116) von der 1; 2; 3; 4; 5; wahr. Und nun setze man $m = 6$; so gilt es von $m + 1$ Also setze man $m = 5$; so gilt es von $m + 1$ oder 7; u. s. w. ohne Ende von allen, und man kann also den 119 gegebenen Ausdruck der Potenz m als allgemein richtig ansehen, und die Exponenten von a und b machen in jedem Gliede zusammen der Potenz Exponenten aus.

121. Zus. Wenn man in jeder Potenz das Glied, darinnen a auf den höchsten Grad erhoben ist, das erste nennt, so ist die Zahl jedes Gliedes um eins weniger als der Exponent von b; denn dieser Exponent ist in demjenigen, das alsdenn das zweyte heißt 1; im dritten 2 u. s. w.

Unterscheidet man aber die Reihe in zwey Stücke, davon das nur genannte Glied welches a

allein

allein enthält, eines und alle die folgenden das andere ausmachen, so ist unter diesen folgenden das erste, zweyte, nte, wo der Exponent von b; 1; 2; n; ist, oder diese Exponenten zeigen die Zahlen dieser folgenden Glieder selbst an.

122. Zus. Jede Potenz hat ein Glied mehr als ihr Exponent Einheiten hat. Denn die Zahl der folgenden Glieder (121) muß dem Exponenten gleich seyn, weil sie alle Potenzen von b, von der ersten an bis auf die, welche diesen Exponenten hat, enthalten (119) und zu diesen Gliedern kömmt noch das, welche kein b enthält. (121)

So hat jede höhere Potenz ein Glied mehr als die nächst niedrigere.

123. Zus. Der Coefficient eines gewissen Gliedes der nächsthöhern Potenz ist die Summe der beyden Coefficienten, die zum eben sovielten, und zum nächstvorhergehenden, der nächstniedrigeren, gehören.

So gehört Q + P in m + 1 zum n + 1ten Gliede (119) und in m gehören Q zum n + 1ten, P zum nten Gliede.

124. Zus. Für das letzte Glied der höhern Potenz, gibt es kein eben sovieltes der niedrigen (122) also ist sein Coefficient mit dem Coefficienten des Gliedes der niedrigern einerley, das vor dem, welches das eben sovielte wäre, vorherginge, d. i. mit dem Coefficienten des letzten Gliedes der niedrigern

Potenz. Ist also bey einer Potenz der Coefficient des letzten Gliedes = 1; so findet dieses auch für die nächsthöhere, und so für alle statt, wenn man immer von einer auf die andere schließt.

125. Erkl. Die Coefficienten des ersten, zweyten, nten, (n + 1)ten, u. s. w. der folgenden Glieder (121) sollen der erste, zweyte, nte, (n + 1)te, heissen, so daß die 1 welche in das Glied, das kein b enthält, multipliciret ist, hier nicht mit unter den Coefficienten gezählt wird.

126. Zus. Wenn der Potenz m; erster Coefficient A = m ist; so ist der Potenz m + 1 erster Coefficient m + 1 (119) d. i. wenn irgend einer Potenz erster Coefficient ihrem Exponenten gleich ist, so ist der nächsthöhern Potenz erster Coefficient auch ihrem Exponenten gleich.

127. Zus. Diese Voraussetzung aber (126) findet für die fünfte Potenz statt (116) also für m = 5 und folglich für m + 1 oder 6; und nun für m = 6; folglich für m + 1 = 7 u. s. w. für alle Potenzen; daß also jeder Potenz erster Coefficient ihrem Exponenten gleich ist.

128. Zus. Der zweyte Coefficient der zweyten Potenz ist dem ersten der ersten gleich, der zweyte der dritten besteht aus dem zweyten und ersten der zweyten (123) und ist also 1 + 2, der zweyte der vierten besteht aus dem zweyten und ersten der dritten, und ist also = 1 + 2 + 3, der zweyte der fünften besteht aus dem zweyten und

ersten

ersten der vierten, und ist also $1+2+3+4$. Ist also in irgend einer Potenz der zweyte Coefficient die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis mit auf die Zahl, die um 1 geringer ist als der Exponent, so findet sich der zweyte Coefficient der nächsthöhern Potenz, wenn man zu der erwähnten Summe, den ersten der niedrigen Potenz, d. i. ihren Exponenten (127) addirt, dieser Exponent aber ist um 1 weniger als der Exponent der nächsthöhern, und also ist wieder der zweyte Coefficient der nächsthöhern, die Summe aller natürlichen Zahlen, bis mit auf die welche um 1 geringer ist als der Exponent dieser nächsthöhern Potenz. Gilt es also von irgend einer Potenz, daß ihr zweyter Coefficient die Summe aller natürlichen Zahlen bis auf den um 1 verminderten Exponenten ist, so gilt dieses auch von der nächsthöhern.

129. Zus. Es gilt aber von der zweyten; und also von der dritten; und da es nun von der dritten gilt, gilt es auch von der vierten, u. s. ohne Ende.

130. Zus. Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis mit auf $m-1$ ist $(1+m-1).\frac{m-1}{2}$ (89) $=$ $\frac{m.(m-1)}{1.2}$; welches also der allgemeine Ausdruck jedes zweyten Coefficienten ist.

131. Zus. Wenn man den ersten und zweyten Coefficienten (127; 130;) mit einander vergleicht, so

so kann man darauf fallen, ob sich nicht vielleicht der dritte durch $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ ausdrücken lasse. Man wird auch sehen, daß dieses zutrifft; denn für $m = 1.2; 3; 4; 5;$ u. s. w. wird er $\frac{2.0}{1.2}; \frac{3.2.1}{1.2.3};$ $\frac{4.3.2}{1.2.3}; \frac{5.4.3}{1.2.3};$ oder 0; 1; 4; 10; u. s. w. wie in der Tafel. In der That läßt sich auch dieser allgemeine Ausdruck des dritten Coefficienten vermöge (123) unmittelbar finden; Aber durch Kunstgriffe, deren Erklärung hier zu viel Weitläuftigkeiten erfoderte. Ich will also seinen angegebenen Ausdruck für die Potenz m als eine Muthmassung annehmen. Kann ich darthun, daraus folge, daß für die nächsthöhere Potenz, deren zweyter Coefficient $\frac{(m+1).m.(m-1)}{1.2.3}$ heissen müsse, so habe ich dargethan, daß der angegebene Ausdruck allgemein für alle Potenzen richtig ist. Man wird nähmlich auf diese Art, von jeder Potenz auf die nächsthöhere schliessen, und der dritte Coefficient jeder Potenz, ist ein Product, aus den drey nach einander folgenden natürlichen Zahlen, darunter der Exponent die größte ist, mit 1. 2. 3 dividirt.

Aber wenn der dritte Coefficient für die Potenz m; erwähnter massen angenommen wird, so ist er für die nächsthöhere (123) $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} +$

$m.(m-1)$

$\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2.} = \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}.\left(\frac{m-2}{3}+1\right) =$

$\frac{m.\,(m-1)}{1.\ 2}.\frac{m-2+3}{3} = \frac{(m+1).\,m.\,(m-1)}{1.\ 2.\ 3}.$

Also folgt aus der Voraussetzung, daß der dritte Coefficient der nächsthöhern Potenz auf eben die Art durch ihren Exponenten ausgedruckt wird, wie der dritte Coefficient der nächstniedrigern durch den ihrigen, und also ist der anfangs dieses Absatzes angenommene Ausdruck, für jeden Exponenten richtig.

132. Zus. Nimmt man für den vierten Coefficienten einer Potenz; $\frac{m.\,(m-1).\,(m-2).\,(m\,3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ an, so ist der vierte der nächsthöhern, das nun Angenommene, zu dem dritten der niedrigen addirt, oder er ist $\frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ 2.\ 3}.\left(\frac{m-3}{4}+1\right)$

$= \frac{(m+1).\,m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, ein Ausdruck, in den sich der angenommene verwandelt, wenn man $m+1$ statt m setzt. Ist also der angenommene Ausdruck für eine Potenz richtig, so ist er auch für die nächsthöhere richtig; Ist nähmlich der vierte Coefficient für eine Potenz ein Product aus den vier nach einander folgenden natürlichen Zahlen, darunter ihr Exponent die größte ist, durch 1.2.3.4 dividirt, so ist der vierte Coefficient der nächsthöhern auch ein Product aus den nach einander folgenden

genden vier natürlichen Zahlen, darunter ihr Exponent die größte ist, durch 1. 2. 3. 4 dividirt. Aber jene Voraussetzung gilt für jede Potenz in der Tafel (117) z. E. für die fünfte, und also gilt die Folge für die 6te; und daher die Voraussetzung für die sechste und die Folge für die 7te u. s. w.

133. Zus. Die ersten vier Coefficienten haben das gemein: Jeder ist ein Quotient, dessen Dividendus ein Product aus soviel nach einander folgenden natürlichen Zahlen ist, so viel Einheiten die Zahl hat, welche die Stelle des Coefficienten anzeigt, z. E. aus 4 beym vierten; die größte unter ihnen ist der Exponent, und die kleinste ist also der Exponent, um die Zahl der Stelle des Coefficienten weniger eins, vermindert; der Divisor ist ein Product aus eben soviel natürlichen Zahlen, unter denen 1 die erste, und folglich die Zahl der Stelle des Coefficienten die letzte ist.

134. Zus. Dieses Gesetz mit Buchstaben ausgedruckt, gibt den $(n+1)$ten Coefficienten (125) der Potenz m; oder (117)

$$Q = \frac{m.(m-1).(m-2)....(m-n+1).(m-n)}{1.\ 2.\ 3.\ .....(n-1).(n+1)}$$

135. Zus. Drückt man den nächstvorhergehenden, P, auch nach dem Gesetze (133) aus, so wird

$$Q = \frac{P.(m-n)}{n+1}$$

136.

136. Zus. Aus (123) wird der (n + 1)te Coefficient der (m + 1)ten Potenz (119) $Q+P=\left(\frac{m-n}{n+1}+1\right)$.

$$P=\frac{(m+1).\ m.\ (m-1)\ldots.(m-n+2).\ (m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots\quad n\quad .\ (n+1)}$$

137. Zus. Eben diesen Ausdruck aber wird man auch bekommen, wenn man m + 1 statt m in dem Werthe von Q (134) schreibt. Also gibt die Multiplication, vermittelst welcher die höhere Potenz aus der nächstniedrigern erhalten wird, für der höhern Potenz unbestimmten (n + 1)ten Coefficienten eben das, was man bekömmt, wenn man in dem (n + 1)ten Coefficienten der niedrigern, statt des Exponenten dieser niedrigern, durchgängig diesen um 1 vermehrten Exponenten schreibt. Man nahm von Q, dem n + 1ten Coefficienten der niedrigen Potenz das Gesetz an, welches man bey den ersten vier Coefficienten gefunden hatte (133; 134) und daraus folgt eben dieses Gesetz auch für Q + P, den n + 1ten Coefficienten der höhern, welcher durch ihren Exponenten so bestimmt wird wie jene durch den Exponenten der niedrigen. Wenn also das (133) angenommene Gesetz des unbestimmten (n + 1)ten Coefficienten für eine Potenz richtig ist, so ist es auch für die nächst höhere richtig.

138. Zus. Aber es ist für jede der Potenzen in der Tafel richtig. Man setze z. E. m = 10, so ist aus (134) der Ausdruck eines unbestimmten (n+1)ten

Coeffi-

Coefficienten der 10 Potenz $\frac{10.\ 9.\ 8.\ \ldots\ 10-n}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n+1}$

In selbigen nach und nach 0; 1; 2; ....9 gesetzt, gibt den ersten, zweyten, dritten .... zehnten Coefficienten. Z. E. der vierte wird $\frac{10.\ 9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ = 210.

139. Zus. Weil also dieses Gesetz (133) jeden Coefficienten der zehnten Prtenz enthält, so enthält es auch jeden der 11ten (137) und weil es jeden der 11ten enthält, so enthält es jeden der 12ten, u. s. f. ohne Ende.

140. Zus. Die Ausdrückungen für Q; P; (134; 135) sind für jeden Exponenten richtig, daß man an die Stelle von m, was für eine ganze positive Zahl man will, schreiben darf.

141. Lehrs. Für jeden ganzen bejahten Exponenten, ist

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.\ (m-1).\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3 \ldots. + \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}a^{m-n}b^n + \frac{P.\ (m-n)}{n+1}.\ a^{m-n-1}b^{n+1} \ldots. + b^n$$

Der

Der Beweis erhellt für die Exponenten aus (120) für die Coefficienten aus (140) wie jeder Coefficient in der Reihe durch seinen nächstvorhergehenden ausgedrückt wird, aus (135)

142. Zus. Wenn unter den folgenden Gliedern (121) das dessen Coefficient P ist π, das nächste nach ihm ϱ, heißt, so ist $\varrho = \frac{m-n}{n+1} . \pi . \frac{b}{a}$

143. Zus. Man setze in der Reihe (141) 1; e; statt a; b; so erhält man eine Reihe für

$$(1+e)^m = 1 + me + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 , \ldots .$$

144. Zus. Weil $(a+b)^m = (a.(1+\frac{b}{a}))^m =$

$a^m . (1+\frac{b}{a})^m$ (20) so erhält man $(a+b)^m$ aus der Reihe (143) wenn man $e = \frac{b}{a}$ setzt, und jedes Glied dieser Reihe mit a^m multiplicirt.

145. Zus. Für $n = m+1$ wird der $m+1$te Coefficient $= \frac{m.(m-1)\ldots(m-m-1+1)}{1.2\ldots\ldots m+1} = 0$

und weil jeder folgende ein Product aus dem vorhergehenden in einen Quotienten ist, dessen Divisor nach der Ordnung nun $m+2$; $m+3$; u. s. w. seyn wird, so werden die folgenden alle auch $= 0$; das ist, der $m$te ist der letzte, und die Reihe bricht also da ab (nach 122)

146. Anm. Dieser Satz (141) heißt von der zweytheilichten Wurzel, (binomio) theorema binomiale: Insgemein wird Newton für seinen Erfinder angegeben, wiewohl von Joh. Bernolli, Op. T. IIII. p. 173. Pascal als der erste Erfinder genannt wird. Man s. auch Commercium epistolic. Io. Collins cet. p. 67. Die Erfindung kann jemanden unter diesen Neuern nur in Absicht auf einen allgemeinen Ausdruck der Coefficienten zugeschrieben werden, vermittelst dessen man jeden Coefficienten für jede Potenz auser der Ordnung finden kann, ohne die Coefficienten für alle vorhergehende Potenzen gefunden zu haben. Denn sonst trifft man diese Coefficienten, und das Gesetz ihrer Fortsetzung durch die Addition, in ältern Büchern an, z. E. beym Clavius Geom. Pract. L. VI. Prop. 19. aber es fehlt da an solchen Formeln oder ihnen gleichgültigen Regeln, wie 131; 132; 140; lehren. Die Coefficienten sind die sogenannten numeri figurati, von denen Jac. Bernouilli Art. Coniect. P. II. c. 3, die allgemeinen Formeln zuerst erwiesen hat, welcher auch daselbst P. II. c. 8. zeigt, wie der Binomische Lehrsatz dadurch kann gefunden werden.

147. Anm. Am häufigsten wendet man die Formel (141) so an, daß m einen Bruch oder eine verneinte Zahl bedeutet. Aber der gegebene Beweis, der sich auf die Multiplication gründet, rechtfertiget dieses nicht. Es soll unten geschehen.

148. Zus. Wenn b verneint ist, so werden alle Potenzen desselben von ungeraden Exponenten verneint, (31) daher werden für $(a-b)^m$ das zweyte, vierte, sechste, und so alle geraden Glieder der Reihe (141) verneint, oder es ist aus (143) $(1-e)^m$

$$= 1 - me + \frac{m.(m-1)}{1.2}e^2 - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}e^2 \text{ u.s.w.}$$

149.

149. Zus. Weil nun für e = 1; diese Reihe = o seyn muß, so muß die Summe der verneinten Glieder, das ist, der ungeraden Coefficienten (125) der Summe der bejahten Glieder, d. i. 1 mit den geraden Coefficienten gleich seyn.

So ist für der zehnte Potenz

$$10 + 120 + 252 + 120 + 10 = 1 + 45 + 210 + 210 + 45 + 1$$

150. Zus. Den (m-n)ten Coefficienten zu finden, muß man in P (141) m - n statt n setzen, so ist er $S = \frac{m.\,(m-1)\ldots(n+1)}{1.\,2\ldots m-n}$. Nun sey m > 2n so ist m - n + 1 > n + 1; also

$$S = \frac{m.\,(m-1)\ldots(m-n+1).\,(m-n)\ldots(n+1)}{1.\,2.\ldots.\,n\,.\,(n+1)\ldots m-n}$$

$$= \frac{m.\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\ldots.\,n} = P.$$ Aber der Coefficient, welcher vom Anfang gezählt, der (m-n)te ist, ist vom Ende gezählt, der (n+1)te, oder er gehört zu dem Gliede, das vom Ende gezählt das (n+1)te ist: Und der Coefficient, welcher vom Anfange gezählt der nte ist, gehört zum (n+1)ten Gliede, wenn man die Glieder nach (121) zählt. Folglich gehören zu Gliedern, die von den äussersten gleich weit abstehen, einerley Coefficienten. Dieses liesse sich schon daraus schliessen, weil einerley herauskommen muß, ob man die Potenz von a + b oder von b + a macht, d. i. ob man die Reihe (141) vorwärts oder rückwärts liest.

151. Zus. Also ist $(a+b+c)^m = ((a+b)+c)^m$. Man kann nähmlich die ersten beyden Theile als einen ansehen, und dadurch die dreytheilichte Wurzel in eine zweytheilichte verwandeln. (wie Ar. IIII. §. 35.) dieses gibt die Potenz der dreytheilichten Wurzel $(a+b)^m + m.(a+b)^{m-1} c \ldots$. wo man, wenn es nöthig ist, die Reihe für die Potenzen der Summe der beyden ersten Theile ausführlich hinschreiben kann.

152. Zus. So läßt sich die Potenz einer viertheilichen Wurzel, u. s. f. finden. Wenigstens kann man hiervon soviel Glieder nach der Ordnung, als man braucht, berechnen. Ob sich aber ein allgemeines Gesetz werde finden lassen, nach dem sich alle diese Potenzen richten, das läßt sich hier nicht so leicht ausmachen.

Geometrische Aufgaben.

153. Aufg. Die Verhältniß der Seite AB eines gleichseitigen Dreyecks ABC 1 F. zum Halbmesser KA des Kreises zu finden, in dem es beschrieben ist.

Auflt. Der Bogen ADB ist 120 Gr. (G. 23. S. 2. Z.) Man fälle KED senkrecht auf AB; so ist $DKA = 60°$; und $AE = \frac{1}{2}$ AB (G. 22. S. 2. Z.) Auch $AD = AK = DK$ (G. 23. S. 5. Z.) folglich $DE = EK$ (G. 9. S. 5. Z.) $= \frac{1}{2}$ AD; also $AE^2 = AD^2 - DE^2$ (G. 15 S.) Es heisse der Halbmes-

ser

ser = r; die gesuchte Seite = x so ist AE = $\frac{1}{2}$ x und $AE^2 = \frac{1}{4}x^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3r^2}{4}$ oder $x^2 = 3r^2$ also $x = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$ (24) = r. 1, 7320508. (Ar. IIII. 27)

154. Zus. AE = r. 0, 8660254. Es ist aber fin tot: fin 60° = 1: AE (Trig. 2 Erkl.) oder $AE = \frac{r.\ \text{fin}\ 60°}{\text{fin tot}}$; Nimmt man also r von soviel Theilen an, als der Sinus totus der Tafeln hat, so wird AE der Sinus von 60 Gr. wie er in den Tafeln steht; z. E. hier 8660254 wenn r = 10 000 000.

155. Anm. Aus f der Seite eines Vielecks von n Seiten, findet sich z die Seite des Vielecks von 2n Seiten (G. 43. S.) $z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}$ folglich $2r(\sqrt{rr^2 - \frac{1}{4}f^2}) = 2r^2 - z^2$ und auf beyden Seiten quadrirt $4r^4 - r^2f^2 = 4r^4 - 4r^2z^2 + z^4$ oder $4r^2z^2 - z^4 = r^2f^2$ oder $z\frac{\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{r} = f$; welches dient aus der Seite eines Vielecks von 2n Seiten die Seite des von n Seiten zu finden.

Setzte man z = r; so fände man hieraus sogleich f; die Seite des Dreyecks.

156. Aufg. Die Verhälrniß der Seite des Zehnecks AB = x 2 F. zum Halbmesser AK = r zu finden.

Aufl. Man verlängere die Seite, so ist, wenn man KD nach Gefallen zieht; BKD + BDK = ABK

ABK (G. 13. S. 1. Z.) Hier nun ist AKB $= \frac{4R}{10}$ $= \frac{2R}{5}$ also ABK $= \frac{4R}{5}$ (G. 13. S. 5. Z.) $=$ 2. AKB; Nimmt man also BD $=$ BK; so ist BKD $=$ BDK $=$ AKB und wegen des gemeinschaftlichen Winkels bey A; Δ ABK $\sim$ Δ AKD (G. 27. S.) (Ich nenne die Spitzen der Dreyecke in der Ordnung, wie an jeder gleiche Winkel in ihrem Dreyecke stehen, z. E. der Winkel K im Dreyecke ABK; ist dem Winkel D im Dreyecke AKD gleich.) Also AK: AB $=$ AD: AK; oder r: x $=$ r + x: r; oder $r^2 = x^2 + rx$ oder $x^2 = -rx + r^2$ daher in (78) statt der dortigen z; p; q; hier x; $-r$; $+r^2$ gesetzt, $x = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + r^2)}$. Hier gäbe nun das unterste Zeichen bey der Wurzel etwas verneintes; und man sieht doch ohne Zweifel die gesuchte Seite als bejaht an. Also wird für sie nur das obere Zeichen gebraucht, und dieses gibt $x = \sqrt{\frac{5}{4}}r^2 - \frac{1}{2}r$

157. **Verzeichnung** (constructio geometrica.) Man ziehe CG $=$ r auf CF $= \frac{1}{2}$ r senkrecht, und beschreibe aus F mit FG $= \sqrt{\frac{5}{4}}r^2$ (G. 15. S.) den Bogen GII; so ist CH $=$ FH - FC $=$ x.

158. **Zus.** Weil $x = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}r. = r.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

so ist sin 18° $= r.\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$

159.

159. Zus. Die Seite des Zehnecks; z in (155) sey das nur gefundene x (158) so ist des Fünfecks Seite, das f in (155). Dieses zu finden; berechnet man z^2 oder $x^2 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} \cdot r^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

r^2 daher $4r^2 - z^2 = \frac{8-3+\sqrt{5}}{2} \cdot r^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot r^2$,

und $r^2 f^2 = z^2 \cdot (4r^2 - z^2) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot$

r^4; Das Product der beyden Zähler, ist $\begin{matrix} 15-5\sqrt{5} \\ -5+3\sqrt{5} \end{matrix}$

$= 10 - 2\sqrt{5}$; Daher, $f^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot r^2$ oder

$f = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

Es ist auch $f^2 - r^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot r^2 = x^2$;

oder die Quadrate des Halbmessers und der Seite des Zehnecks, machen zusammen das Quadrat der Seite des Fünfecks; Daher ist in der 3 fig. eine gerade Linie von H bis G; die Seite des Fünfecks.

Man hat auch hieraus den Sinus von 36 Gr. $= \frac{1}{2} f$

160. Aufg. Die Seite des Achtecks in einem gegebenen Kreise zu finden.

Auft. Die Seite des Vierecks ist $r\sqrt{2} = f$ (155) also daselbst $z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{2} r^2)}$ $= 2r^2 \cdot (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$.

161. Zus. Man kann also aus 153; 155; 156; 159; 160; die Vielecke von 3; 6; 12; 24; u. s. f. von 4; 8; 16; 32; u. s. f. von 5; 10; 20; u. s. f. Seiten in den Kreis beschreiben, und ihre Seiten durch den Halbmesser berechnen.

162. Zus. Daraus geben sich wie in (154) die Sinus für die halben Mittelpunctswinkel (§. 23. S. 3. Z.) dieser Vielecke.

163. Aufg. Wenn BP = k, DT = c; die parallelen Sehnen zweyer Bogen BAP; DAT; gegeben sind, daraus die Sehne ihres Unterschiedes zu finden, die h heissen soll.

Aufl. BE = $\frac{1}{2}$k; DF = $\frac{1}{2}$ c sind die Sinus der Hälften der Bogen BAP; DAT; und DG ist der Sinus ihres halben Unterschiedes. Zwischen diesen drey Sinussen hat man die Vergleichung Trig. 29. S. gef. Nun ist DAT - BAP = BD + PT = 2 BD; und also der Bogen, zu denen die Chorden gehören, Unterschied noch einmahl so groß als der Unterschied der Bogen, zu denen die Sinus gehören, folglich DG der Sinus des halben Unterschiedes der Bogen, zu denen die Sehnen gehören, und also 2 DG = h. Man setze also a. a. O. der Trigonometrie f = $\frac{1}{2}$ c; m = $\frac{1}{2}$ k; d = $\frac{1}{2}$ h; so wird $\frac{1}{2}$ h = $\frac{1}{2}$ c. ($\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)}$ — $\frac{1}{2}$ k $\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$: r also

$$h = \frac{c\sqrt{(4r^2 - k^2)} - k\sqrt{(4r^2 - c^2)}}{2r}$$

164.

164. Zus. Eben so findet man aus Trig. 19 S. II. die Sehne der Summe

$$c = \frac{h\sqrt{(4r^2 - k^2)} + k\sqrt{(4r^2 - h^2)}}{2r}$$

165. Zus. Wenn 5 Fig. der Bogen $H\lambda L = \frac{1}{2}$ HLM; so setze man in (163) $h = k = HL$; $c = HM$; Man sieht nähmlich den Bogen HAL als den Unterschied des Bogens HLM und eines, der so groß als $H\lambda L$ ist, an. Dieses gibt, wenn $r = 1$ gesetzt wird, (Trig. 19. S. Anm.) $2h = c\sqrt{(4-h^2)}$ $- h\sqrt{(4-c^2)}$ also $h.(2+\sqrt{(4-c^2)}) = c\sqrt{(4-h^2)}$ wenn man auf beyden Seiten quadrirt,

$$h^2 = \frac{c^2}{2+\sqrt{(4-c^2)}}$$

so findet man endlich für h die Sehne des halben Bogens, wenn c die Sehne des ganzen gegeben ist.

166. Zus. Weil der doppelte Bogen die Summe zweener einfachen ist, so setze man in (164) $h = k$; $r = 1$; dieses gibt $c = h\sqrt{(4-h^2)}$ die Sehne des doppelten Bogens durch die Sehne des einfachen.

167. Zus. Man suche h in (166) nähmlich $c^2 = 4h^2 - h^4$ oder $h^4 = 4h^2 - c^2$ folglich (78) $h^2 = 2 \pm \sqrt{(4-c^2)}$. Dieses gibt zweene verschiedene Werthe für das Quadrat der Sehne h des einfachen Bogens aus der Sehne c; des doppelten Bogens. Nähmlich die Sehne HM 5 F. gehört zugleich zu den Bogen HLM und HNM;

den Bogen also, dessen Sehne HM ist, halbiren, heißt jeden der genannten Bogen halbiren; wenn aber HLM = ω; der Umfang HLMNH = P so sind die beyden Bogen, zu denen die Sehne HM gehört; ω; P - ω; also ihre Hälften HλL = $\frac{1}{2}\omega$; Hη N = $\frac{1}{2}$P - $\frac{1}{2}\omega$ die nähmlich zusammen $\frac{1}{2}$P ausmachen. Folglich gehören die beyden Werthe von h^2 für die beyden Quadrate der Sehnen HL; HN; Wenn nun $\omega \lessgtr \frac{1}{2}$P so ist $\frac{1}{2}\omega \lessgtr \frac{1}{4}$P; aber $\frac{1}{2}$P - $\frac{1}{2}\omega \lessgtr \frac{1}{4}$P folglich die Sehne HL $\lessgtr$ HN; In diesem Falle also, wenn der kleinste Bogen, zu dem die Sehne c gehört, kleiner als ein Halbkreis ist, ist das Quadrat der Sehne der Hälfte dieses Bogens = $2 - \sqrt{(4 - c^2)}$ und $2 + \sqrt{(4 - c^2)}$ das Quadrat der Sehne der Hälfte seiner Ergänzung zu P; In dem entgegengesetzten Falle wird es sich umgekehrt verhalten.

168. Anm. Diese Zweydeutigkeit, vermöge welcher h sowohl HL als HN bedeuten kann, ward dem Scheine nach in (165) vermieden, sie ist aber in der That auch dort zu finden, weil man die Wurzelgrösse im Divisor so wohl bejaht als verneint ansehen kann. (32)

169. Anm. Auch sind beyde Wehrte (165; 167;) gleich, wenn man nähmlich in dem 165; Divisor und Dividendus mit $2 - \sqrt{(4 - c^2)}$ multiplicirt, so bleibt seine Grösse unverändert, und sein Ausdruck verwandelt sich in den Ausdruck 167.

170. Anm. Man kann auf eben die Art den Sinus oder die Tangente des halben Bogens aus Trig. 19. S. suchen, und findet eben die Zweydeutigkeiten. (167) Ich habe dieses allgemein für jede Theilung

des

des Winkels in meinem Programma: Vnde plures iuſint radices aequationibus ſectiones angulorum definientlbus, Gott. 1756. betrachtet.

171. Zuſ. Durch Wiederhohlung der Arbeit (167) berechnet man die Sehnen für $\frac{1}{4}\omega$; $\frac{1}{8}\omega$; u. ſ. w. oder für alle Theile, die ſich durch Halbiren finden laſſen, daß uns alſo hier die Algebra ſo weit führt als die gemeine Geometrie (G. 5. S. Zuſ.)

172. Zuſ. Hat man die Seiten zweyer ordentlicher Vielecke von m; und von n; Winkeln; d. i. hat man die Sehnen von $\frac{1}{m}$ P und $\frac{1}{n}$ P; ſo findet man aus (163) die Sehne von $\frac{m-n}{mn}$ P; Iſt nun m-n eine Potenz der 2; ſo findet man aus (171) die Sehne von $\frac{1}{mn}$ P d. iſt. die Seite des Vielecks, das mn Winkel hat.

Es ſey $m = 5$; $n = 3$; ſo findet man aus den Seiten des Fünfecks und des Dreyeckes (159; 153;) die Sehne von $\frac{2}{15}$ P; und durch deren Halbirung die Seite des Funfzehnecks. S. Clau. Schol. ad Euel. 16. IIII. Wenn man aus (164) die Sehne der Summe von $\frac{1}{3}$ P + $\frac{1}{5}$ P d. i. von $\frac{8}{15}$ P ſuchte, ſo käme man durch dreymahliges Halbiren auch auf das Funfzehneck.

173. Anm. Auſer den Vielecken, die (161; 171;) gefunden worden, laſſen ſich keine durch die Auflöſung

quas

quadratischer Gleichungen finden, und daher auch nicht durch die gemeine Geometrie verzeichnen, wie weiter unten ausführlicher gezeigt werden wird.

174. Aufg. Aus der gegeben Seite eines ordentlichen Vielecks den Halbmesser des Kreises zu finden, darin es sich beschreiben läßt.

Aufl. Man darf nur in der Gleichung, welche die Seite des Vielecks durch den Halbmesser gibt, diesen als die gesuchte Grösse, jene als die gegebenen ansehen.

Ex. In (156) ist $\frac{2x}{\sqrt{5-1}} = r$

175. Aufg. Wenn der Sinus a; und Cosinus b; des einfachen Winkels, für den Halbmessers = 1 gegeben sind, daraus die Sinus und Cosinus der vielfachen zu finden.

Aufl. Die Vielfachen entstehen, wenn man das Einfache immer zu sich selbst addirt. Also sey in Trig. 19. S. allemahl $d = a$; $\delta = b$; Ferner für das doppelte; $m = a$; $\mu = b$; also des doppelten; Sinus $= 2ab$; Cosinus $= b^2 - a^2$ (das. 2. Zus.) Nun setze man statt m und μ, den Sinus und Cosinus des doppelten, so hat man des dreyfachen; Sinus $a(b^2-a^2)+b.\,2ab = 3ab^2-a^3$; Cosinus $= (b^2-a^2).\,b - 2ab.\,a = b^3 - 3a^2b$; Wiederum diese beyden statt m; μ; gebraucht, geben des vierfachen Sinus $(b^3 - 3a^2b).\,a + (3ab^2 - a^3).\,b = 4ab^3 - 4a^3b$; Cosinus $=$

(b³

$(b^3-3a^2b).b-(3ab^2-a^3).a = b^4-6a^2b^2+a^4$;
diese statt m und μ gebraucht, geben des fünffachen Sinus $= (4ab^3-4a^3b).b+(b^4-6a^2b^2+a^4).a = 5ab^4-10a^3b^2+a^5$; Cosinus $= (b^4-6a^2b^2+a^4).b-(4ab^3-4a^3b).a = b^5-10a^2b^3+5a^4b$; u. s. w.

176. Zus. Die hier wirklich berechneten Sinus und Cosinus beobachten folgendes Gesetz: Wenn man $b+a$ auf die Potenz erhebt, deren Exponent das Vielfache des Winkels anzeigt, und sich um die Zeichen der Glieder dieser Potenz nicht bekümmert, sondern nur auf ihre Grössen acht gibt, so enthält der Sinus das zweyte, vierte, sechste, u. s. f. Glied dieser Potenz, und der Cosinus, das erste, dritte, fünfte, u. s. w. Jener die geraden, dieser die ungeraden. Die Zeichen aber der Glieder wechseln in jeder Reihe für den Sinus und für den Cosinus ab, so daß das erste bejaht ist.

Zum Exempel dient die fünfte Potenz von $b+a$ die man in 116 findet, wenn man die dortige Reihe mit dem Sinus und Cosinus des fünffachen Winkels vergliche.

177. Zus. Man mache $(b+a)^n$ nach dem Binomischen Lehrsatze (141) man verwechsele nähmlich dorten a; und b; und setze hier n statt des dortigen m; ferner 4r statt des dortigen n; daß also P den Coefficienten bedeute, dessen Zahl 4r; sich zweymahl mit 2 dividiren läßt, (numerus pariter par) ferner seyn Q; R; S; T; die nächstfolgenden

Coef-

Coefficienten, da die Zahl von R nähmlich 4r + 2 sich nur einmahl mit 2 vividiren läßt; und A; B; C; D; u. s. w. seyn die Coefficienten von Anfange, nähmlich $A = n; B = \frac{n.(n-1)}{1.2}; C = \frac{n.(n-2)(n-3)}{1.2.3}$

u. s. w. so gibt das (176) bemerkte Gesetze, wenn es allgemein ausgedruckt wird, für den n fachen Winkel.

den Cosinus $= b^n - Bba^{n-2} + Dba^{n-4} \ldots .$

$+ Pba^{n-4r} - Rba^{n-4r-2} = \mu$

den Sinus $= Aba^{n-1} - Cba^{n-3} + Eba^{n-5} \ldots .$

$+ Qba^{n-4r-1} + Sba^{n-4r-3} = m$

Hieraus folgt für den (n + 1) fachen Winkel

$b\mu$ - am als der

Cosinus $= b^{n+1} - (A+B)\,ba^{n-1} + (C+D)\,ba^{n-3} \ldots . - (Q+R).\,ba^{n-4r-1} + (S+T)ba^{n-4r-3} \ldots .$

dergleichen $a\mu + bm$ als der

Sinus $= (A+1)\,ba^{n} - (B+C)\,ba^{n-2} \ldots + (P+Q)\,ba^{n-4r} - (R+S)\,ba^{n-4r-2} \ldots .$

Aber aus (136) ist A + B; C + D; Q + R; S + T; der zweyte, vierte, 4r + 2te, 4r + 4te Coefficient der Potenz n + 1; wie B; D; R; T; der zweyte, vierte,

4r

$4r + 2$te, $4r + 4$te; der Potenz n waren; wenn also das Gesetz für den Cosinus des n fachen Winkels angenommen wird, so folgt es für den Cosinus des $n + 1$ fachen. Eben so folgt es für dieses Sinus aus dem Sinus für jenen, denn $A + 1$; $B + C$; $P + Q$; $R + S$; und A; C; Q; S; sind der 1; 3; $4r + 1$; $4r + 3$; Coefficient, jene für die Potenz $n + 1$ diese für n. Da also das angenommene Gesetz wahr ist, wenn $n = 2; 3; 4; 5;$ gesetzt wird, so ist es für alle Vielfache wahr, nach der Art zu schliessen, die (139) gebraucht worden.

178. Anm. Aus Trig. 19. S. 3. Zus. lassen sich auf diese Art auch die Tangenten der vielfachen Winkel finden, und man kann ihr allgemeines Gesetz bestimmen, welches sich noch leichter durch die Integralrechnung thun läßt.

Von den unbestimmten Aufgaben.

179. Erkl. Eine Aufgabe heißt unbestimmt, wenn die Gleichung, dadurch sie aufgelöset wird, zwo oder mehr unbekannte Grössen enthält. (70)

180. Zus. Wenn die Gleichung zwo unbekannte Grössen enthält, so kann man eine nach Gefallen annehmen, und jeder Wehrt, den man für dieselbe annimmt, bestimmt einen oder vielleicht mehr Wehrte der andern; daß also die andere nicht nur einen Wehrt, oder eine gewisse Menge von Werthen, sondern unzählich viele, eine ganze Reihe von Wehrten haben kann, die durch die Reihe von

Wehr-

Wehrten, welche die erste Grösse bekömmt, bestimmt wird.

Ex. Es sey $y = 2x^2 - 5$; so ist für

$x = -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; +4$ ..

$y = +13; +3; -3; 5; -3; +3; +13; +27$ ..

181. Zus. Enthält die Gleichung drey unbekannte Grössen, x; y; z; so gibt eine nach Gefallen angenommen, eine Gleichung wie (180) und also gibt die Reihe der Wehrte von z; eine Reihe von Gleichungen wie die in 180.

Ex. $y = 2x^2 - z$; gibt für

$z = 0; +3; +5$...

$y = 2x^2; 2x^2 - 3; 2x^2 - 5$...

182. Anm. Exempel von unbestimmten Aufgaben in der Geometrie, sind: Ein rechtwinklichtes Dreyeck zu machen, dessen Hypothenuse gegeben ist (G. 21. S. 1. Zus.) ein Dreyeck zu machen, dessen Grundlinie und Innhalt gegeben sind. (G. 42 S. 24 Zus.)

183. Anm. Man sucht die unbestimmten Aufgaben so aufzulösen, daß die gesuchten Grössen Rationalzahlen werden. Die alten sind auf diese Untersuchungen gerathen, weil sie die Irrationalzahlen nicht für rechte Zahlen hielten, auch keine solche bequeme Arten hatten als wir, sich derselben wahren Wehrte zu nähern. Diophantus hat hievon geschrieben, daher man die hiezu nöthigen Kunstgriffe analysin diaphanteam nennt.

184. Aufg. Die Umstände zu finden, unter denen in der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$; der Wehrt der unbekannten Grösse rational ist.

Auflö

Aufl. Weil $x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ (78)

so wird dieser Werth rational; wenn das, was unter den Wurzelzeichen steht, ein vollkommenes Quadrat ist. Man setze, es sey das Quadrat von b-u oder es sey $\sqrt{(b^2-4ac)} = b-u$ so ist auf beyden Seiten quadrirt, $b^2-4ac = b^2-2bu+u^2$ oder $-4ac = -2bu+u^2$; folglich $b = \frac{u^2+4ac}{2u}$

und $b-u = \frac{4ac-u^2}{2u}$; also $x = \frac{-u^2-4ac \pm (4ac-u^2)}{4au}$

oder die beyden Wehrte von x sind $\frac{-u}{2a}$; $\frac{-2c}{u}$;

und die Gleichung muß seyn: $ax^2 + \frac{u^2+4ac}{2u}x + c = o$; wo man a; c; u; nach Gefallen annehmen darf, und allemahl einen rationalen Werth für x bekömmt.

Ex. Für $a = 5$; $c = \frac{1}{4}$; wird $5x^2 + \frac{u^2+5}{2u}x + \frac{1}{4} = o$ wo man statt u was man will setzen kann, und die beyden Wehrte der unbekannten Grösse $\frac{-u}{10}$; $\frac{1}{2u}$ seyn werden. Es sey $u = -1$; so ist $5x^2 - 3x + \frac{1}{4} = o$ und die Wehrte von x sind $+\frac{1}{10}$; $+\frac{1}{2}$. Die Ursache, warum man für $\sqrt{(b^2-4ac)}$ den Ausdruck b-u annimmt, ist:

damit sich das Quadrat von b auf beyden Seiten aufhebt, und also eine Gleichung herauskömmt, da b nur eine Abmessung hat, folglich allemahl rational wird, wenn man u rational annimmt. Dieses gibt also auch b - u rational. Es muß nähmlich b eine solche Rationalzahl seyn, für welche u in der Gleichung $2ub = u^2 + 4ac$ rational ist. Wollte man b und c nach Gefallen annehmen, und daraus u bestimmen, so würde solches nicht allemahl rational werden; also bestimmt man b aus u und c.

185. Aufg. Ein Quadrat zu finden; das von einem gegebenen Quadrate abgezogen, ein Quadrat läßt.

Aufl. Wenn des gegebenen Quadrates Wurzel z heißt, so soll $z^2 - x^2 = y^2$ seyn, wo x; y; beyde unbekannt sind, beyde aber nebst z rational seyn sollen. Nun muß man für y einen solchen Ausdruck annehmen, vermittelst dessen sich x durch eine einfache Gleichung bestimmen läßt. Dergleichen Ausdruck ist y oder $\sqrt{(z^2-x^2)} = z - px$; denn wenn man quadrirt, so hebt sich z^2 auf beyden Seiten auf, und kömmt — $x^2 = -2pzx + x^2p^2$ wo man durchgängig mit x dividiren kann, und $x = \frac{2pz}{1+p^2}$ bekömmt. Wenn man also hier statt p was für eine Rationalzahl man will, setzt, so bekömmt man für x einen rationalen Wehrt, und derselbe gibt auch einen rationalen Werth für $y = z$.

$y = z.\frac{(1-p^2)}{1+p^2}$ Hier wird y verneint oder bejaht, nachdem p^2 gröſſer oder kleiner als 1 iſt. Es iſt nähmlich $\pm\sqrt{(z^2-x^2)} = z-px$; oder man hätte auch ſetzen können $\sqrt{(z^2-x^2)} = px-z$ da man denn $y = \frac{z.(p^2-1)}{1+p^2}$ bekommen hätte, welches bejaht oder verneint wird, nachdem jener Werth verneint oder bejaht iſt.

Ex. Es ſey $z = 10$; oder $\sqrt{(100-x^2)} = y$ ſo iſt $x = \frac{20p}{1+p^2}$; $y = \frac{10.(1-p^2)}{1+p^2}$. Man nehme $p = \frac{1}{2}$; ſo wird $x = \frac{10.4}{5} = 8$; $y = \frac{10.\frac{3}{4}.4}{5}$ $= 6 = \sqrt{(100-64)}$. Man nehme $p = 5$; ſo wird $x = \frac{20.5}{26} = \frac{50}{13}$; $y = \frac{10.-24}{26} = -\frac{120}{13} = -\sqrt{(100-\left(\frac{50}{13}\right)2)}$

186. Aufg. Wenn in $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$; x gegeben iſt, das übrige ſo zu finden, daß alles rational wird; oder, ein Quadrat zu finden, das zu einem gegebenen Quadrate addirt, ein Quadrat gibt.

Aufl. Man ſetze $z = u + y$ ſo wird $u^2 + 2uy + y^2 = x^2 + y^2$ wo ſich das Quadrat des

gesuchten y auf beyden Seiten aufhebt, und $y = \frac{x^2 \cdot u^2}{2u}$; $z = \frac{x^2 + u^2}{2u}$ kömmt; Man nimmt hier u nach Gefallen an.

Ex. Wenn $x = 9$; gegeben ist und $u = 1$ angenommen wird, so ist $y = 40$; $z = 41 = \sqrt{(81 + 1600)}$

187. Aufg. Zwo ganze Zahlen zu finden, deren Quadrate zusammen das Quadrat der dritten ausmachen.

Aufl. Es sey wieder $x^2 + y^2 = z^2$; wo alle drey Zahlen ganze seyn sollen. Man setze $z + x = a$; $z - x = b$; also $z^2 - x^2 = y = ab$; dieser Gleichung genug zu thun, nehme man $a = ny$; $b = \frac{y}{n}$ wo, damit ny eine ganze Zahl ist, n eine ganze Zahl seyn muß mit der sich y dividiren läßt; Also setze man $y = mn$ wo m eine ganze Zahl bedeutet. Dieses gibt $a = mn^2$; $b = m$; $y = mn$; $x = \frac{a-b}{2}$ (Trig. 13. S.) $= \frac{m.(n^2 - 1)}{2}$; $z = \frac{a+b}{2} = \frac{m.(n^2 + 1)}{2}$ die drey gesuchten Zahlen, werden also durch n; m; bestimmt; welche man so annehmen muß, daß $(n^2 - 1).m$; $(n^2 + 1).m$, gerade werden. Ist also m ungerade, so müssen $n^2 - 1$; $n^2 + 1$ gerade seyn, d. i. n^2 muß ungerade seyn, aber das Quadrat jeder ungeraden Zahl,

Zahl, und nur das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade; (37) also muß man in diesem Falle n ungerade nehmen, und man kann statt n, jede ungerade Zahl nehmen. Ist aber m gerade, so mag n gerade oder ungerade seyn.

Ex. I. Man setze $m = 1$; so muß n ungerade seyn, und die drey Zahlen werden

$y = n = 1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots$

$x = \frac{n^{2-1}}{2} = 0; 4; 12; 24; 40; 60; \ldots$

$z = \frac{n^{2}+1}{2} = 1; 5; 13; 25; 41; 61; \ldots$

II. Man setze $m = 2$; so wird jede ganze Zahl statt n gebraucht

$y = 2n = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14.$

$x = n^{2-1} = 0; 3; 8; 15; 24; 35; 48.$

$z = n^{2}+1 = 2; 5; 10; 17; 26; 37; 50.$

188. Zus. Zu jeder gegebenen ganzen Zahl y, läßt sich eine andere x; finden, deren Quadrat zu jener Quadrate addirt, das Quadrat einer dritten ganzen Zahl z macht. Die Auflösung der Aufgabe ist in beyden Exempeln enthalten, nachdem die gegebene Zahl ungerade oder gerade ist. Die Erfindung der Regel für das erste Exempel wird dem Pythagoras, der für das zweyte dem Plato zugeschrieben. Clau. Schol. ad Eucl. 47. I. Beyde Exempel zusammen enthalten alle Zahlen, welche der Frage (187) genug thun, weil allemahl eine der beyden, deren Quadrate zusammen addirt werden, entweder gerade oder ungerade seyn muß. Wenn

man nähmlich statt m andere Wehrte als 1 und 2 setzt, so findet man nur Vielfache solcher Zahlen, wie in den Reihen der Exempel vorkommen, und diese Vielfache müssen also auch in den Reihen selbst, wenn man solche weit genug fortsetzt, vorkommen.

189. Zus. Im I. Ex. sey $n = 2r - 1$ so wird $y = 2r - 1$; $x = 2r.(r-1)$ allemahl gerade; $z = 2r.(r-1) + 1$ allemahl ungerade. Im II. Ex. sind x und z abwechselnd und allemahl zugleich gerade oder ungerade.

190. Anm. Die beyden kleinen Zahlen lassen sich also als Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ansehen, dazu die dritte Zahl die Hypothenuse gibt. Daher heißt man dieses: Ein pythagorisches Dreyeck in Zahlen finden. Man kann noch sehr viel hieher gehörige Fragen aufgeben, die aber keinen Nutzen in andern Untersuchungen haben. Der Jesuit Jacob de Billy hat im I. Th. seines Diophanti redivivi (Lugd. 1670, 80) dergleichen verschiedene aufgelöst, der zweyte Theil enthält andere unbestimmte Aufgaben; beym Diophantus u. a. findet man mehr dergleichen.

Von den Gleichungen.

191. Aufg. Wenn in einer bestimmten Gleichung die unbekannte Grösse sich unter Wurzelzeichen befindet, die Gleichung rational zu machen, d. i. in eine zu verwandeln, wo die unbekannte Grösse unter keinem Wurzelzeichen befindlich ist; die Coefficienten mögen rational oder irrational seyn.

I. Fall. Wenn nur ein einziges solches Wurzelzeichen vorhanden ist, schaffe man es auf eine

Seite

Seite des Gleichheitszeichens und erhebe auf beyden Seiten auf die Potenz, deren Exponent der Wurzel Exponenten gleich ist. Die Wurzelgröſſe muß auf einer Seite stehen, ohne das, was dazu addirt ist, weil man sie sonst durch dieses Verfahren nicht wegschafft.

Ex. $\sqrt[3]{(7+y)} = 5y^2 + 1$ gibt cubirt $7+y = 125y^6 + 75y^4 + 15y^2 + 1$.

II. Fall. Wenn mehr als eines da ist, muß man diese Arbeit wiederhohlen.

Ex. $\sqrt[3]{(7+5y)} = 4 + \sqrt{(3+2y^2)} + y$ gibt cubirt $7+5y = (4+y)^3 + 3.(4+y)^2.\sqrt{(3+2y^2)} + 3(4+y).(3+2y^2) + (3+2y^2).\sqrt{(3+2y^2)}$ daraus wird $7+5y-(4+y)^3-3.(4+y).(3+2y^2) = (3.(4+y^2)+3+2y^2).\sqrt{(3+2y^2)}$ wo auf beyden Seiten noch quadrirt werden muß.

192. Aufg. Eine rationale bestimmte Gleichung zu ordnen.

Aufl. I. Wenn sich die unbekannte Gröſſe irgendwo im Divisor befindet, multiplicire man mit diesem Divisor alle Theile der Gleichung, damit sie nirgends im Divisor bleibt. Dieses muß wiederhohlt werden, wenn in mehr als einem Theile der Gleichung die unbekannte Gröſſe im Divisor ist.

II. Alles, was in einerley Potenz der unbekannten Gröſſe multiplicirt ist, sehe man als einen einzigen Coefficienten und das ganze Product aus die-

sem Coefficienten in die Potenz, als ein einziges Glied an. Zu dieser Absicht muß man alles, was in einerley Potenz multiplicirt ist, auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringen. Eine Grösse wird mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die gegenüberstehende Seite gebracht; die verschiedenen Theile des Coefficientens können in einer Columne unter einander geschrieben werden, an die man oben die Potenz schreibet.

III. Wenn die höchste Potenz der unbekannten Grösse einen andern Coefficienten als 1 hat, so dividire man damit jedes Glied, oder ist sie mit was dividirt, so multiplicire man jedes Glied damit; daß ihr Coefficient 1 wird.

IIII. Hat sie das Zeichen + vor sich, so bringe man alle Glieder auf die Seite des Gleichheitszeichens, auf der sie steht. Hat sie — so bringe man sie und alle übrigen Glieder, die mit ihr auf einer Seite stehen, auf die andere Seite, da sie denn + bekömmt. So bleibt auf einer Seite des Gleichheitszeichens allemahl o.

V. Die höchste Potenz schreibe man zuerst zur linken Hand und die andern Glieder in der Ordnung nach ihr, wie ihre Potenzen folgen. (2;3)

Exempel $a - mz = \frac{z}{z^3 - e} + \frac{c}{z^2}$ gibt nach I.

$az^3 - mz^4 - ae + mez = z + cz^3 - ec$ und

$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = z^3 + cz^3 - ec.$

und nach II.

$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = -ec$

— 1

— c

und nach III.

$\frac{a}{m} z^5 - z^6 - \frac{ae}{m} z^2 + \frac{me - 1 - c}{m} z^3 = -\frac{ec}{m}$

und nach IIII. V.

$o = z^6 - \frac{a}{m} z^5 + \frac{me - 1 - c}{m} z^3 + \frac{ae}{m} z^2 + \frac{ec}{m}$

193. Anm. Hier werden zuweilen Coefficienten = o oder die Glieder fehlen. Z. E. wenn $me = c + 1$. Man kann nähmlich jedes Glied, das fehlt, ansehen, als wäre sein Coefficient = o. Man kann auch Grössen, die auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens stehen, sogleich wegiassen, weil sie sich aufheben; z. E. $z^3 - 6z = 4 - 6z + 3z^2$ gibt $z^3 = 4 + 3z^2$.

194. Zus. Eine Gleichung, in welcher zwo unbekannte Grössen sind, läßt sich auf diese Art nach einer von ihnen ordnen, wenn man die andere nur in die Coefficienten der Glieder bringt. Man kann jeden dieser Coefficienten nach der andern ordnen.

Ex. $y^2 + axy + cx^2 = o$
$+b \quad +ex$
$+f$

195. Aufg. Aus zwo Gleichungen, deren jede zwo unbekannte Grössen, aber eine nur von der ersten Abmessung enthält, diese wegzuschaffen, d. i. eine dritte Gleichung zu machen, in welcher nur die andere unbekannte Grösse zu finden ist.

Aufl. Aus der Gleichung, in welcher die Grösse, die man wegschaffen will, nur auf die erste Abmessung steigt, suche man ihren Werth und setze ihn in die andere.

Ex. Aus der Gleichung 194; und gegenwärtiger $y + mx + n = o$ soll man x wegschaffen; so setze man in jene $-mx - n$ statt y; dieses gibt die dritte.

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2$$
$$-am - an = o$$
$$-bm - bn$$
$$+c + e + f$$

196. Aufg. Zwo rationale Gleichungen A; B; enthalten jede zwo unbekannte Grössen x; y; und zwar ist die höchste Potenz in beyden Gleichungen einerley. Man soll aus ihnen eine dritte Gleichung C machen, wo die höchste Potenz von y wenigstens ei-

nen

nen Grad niedriger als in einer der beyden vorigen.

Aufl. Man suche den Wehrt der höchsten Potenz aus jeder der ersten Gleichungen, und setze beyde Wehrte gleich).

Ex. A) $3y^3 + xy^2 + x^3 = o$; B) $\frac{y^3}{x} -$

$a^2 + by = o$ gibt

$y^3 = -\frac{xy^2}{3} - \frac{x^3}{3} = a^2 x - bxy$ also geordnet (194)

C) $o = y^2 - 3by + x^2 + 3a^2$

197. Aufg. In zwo Gleichungen D; E; befinden sich zwo unbekannte Grössen, und zwar ist y in D auf eine höhere Potenz erhoben als in E; Man soll eine dritte Gleichung G machen, in der die höchste Potenz von y wenigstens einen Grad niedriger ist als in D.

Aufl. Man multiplicire alle Glieder von E durch die Potenz von y, welche macht, daß in der neuen Gleichung F; die man durch diese Multiplication erhält, die höchste Potenz von y mit der höchsten Potenz in D einerley ist. Nun verfahre man mit D; F; wie mit A; B; (196)

Ex. D) $y^5 - a^4 x = o$; E) $y^2 - xy - b^2 = o$

F) $y^5 - xy^4 - b^2 y^3 = o$; G) $y^4 + \frac{b^2}{x} y^3$

$** - a^4 = o$.

198. Erkl. Eine Gleichung ist niedriger als die andere, wenn die höchste Potenz der Grösse, nach der beyde geordnet sind, in jener niedriger ist als in dieser.

So ist G einen Grad, und E zweene Grade niedriger als D (197).

199. Aufg. Zwo Gleichungen H; K; enthalten zwo unbekannte Grössen; Man soll die eine y; nach der sie beyde geordnet sind, aus ihnen wegschaffen, (eliminare incognitam vnam) d. i. eine Gleichung V machen, die nur die andere unbekannte Grösse enthält.

Aufl. Wenn H; K; nicht gleich hoch sind, (196) so sey H am höchsten (197). In beyden Fällen bekömmt man aus 196. 197. eine Gleichung L; die wenigstens einen Grad niedriger ist als H. Sind nun K; L; gleich hoch, so verfahre man nach (196) oder wenn sie nicht gleich hoch sind, nach (197) eine Gleichung M zu erhalten, die gewiß einen Grad niedriger ist als die höchste von beyden; K oder L; Nun vergleiche man M mit der niedrigsten der beyden K oder L; so bekömmt man eine neue Gleichung N; die gewiß einen Grad niedriger ist als die höchste der beyden, aus denen sie entstanden ist. Und so vermindert man die Grade der Gleichungen beständig, bis man auf eine vom ersten Grade T kömmt, aus der man mit K als der niedrigsten von beyden H; K; verglichen nach (195) V erhält. Es ist bequem, hier die Gleichungen

gen so zu ordnen, daß die höchste Potenz allein, positiv, ohne Coefficienten, auf einer Seite des Gleichheitszeichens stehet, weil man auf diese Art die Wehrte dieser höchsten Potenz am bequemsten gleich setzen kann.

200. Ex. H) $y^7 = a^6 x$. K) $y^3 = axy - b^3$; K mit y^4 multiplicirt (197) und beyde Wehrte der höchsten Potenz gleich gesetzt, gibt

$a^6 x = axy^5 - b^3 y^4$ daraus kömmt L) $y^5 = \frac{b^3}{ax}$

$y^4 + a^5$ und dieses ist mit K verglichen nach (197)

$= axy^3 - b^3 y^2$ daraus folgt M) $y^4 = \frac{a^2 x^2}{b^3}$

$y^3 - axy^2 - \frac{a^6 x}{b^3}$ und dieses ist mit K verglichen nach (197) $= axy^2 - b^3 y$. Daraus folgt N) $y^3 = \frac{2b^3}{ax} y^2 - \frac{b^6}{a^2 x^2} y + \frac{a^4}{x}$ und dieses ist, mit K verglichen, nach (196) $= axy - b^3$ daraus folgt O) $y^2 = \frac{a^3 x^3 + b^6}{2 a x b^3} y - \frac{a^5 + ab^3 x}{2b^3}$ dieses nach 197 mit K verglichen gibt $\frac{a^3 x^3 + b^6}{2 a x b^3} y^2 - \frac{(a^5 + ab^3 x) y}{2b^3} = axy - b^3$ daraus folgt P) $y^2 =$

(a⁵

$\frac{(a^4+3ab^2x).ax}{(a^3x^3+b^6)}y-\frac{2ab^6x}{a^3x^3+b^6}$ und die Werthe von y^2 aus P; O; gleich gesetzt, gibt nach (196)

T) $y=\frac{2ab^6x}{a^3x^3+b^6}-\frac{a^4+ab^3x}{2b^3}$

$$\frac{\frac{(a^4+3ab^3x)ax}{(a^3x^3+b^6).}+\frac{a^3x^3+b^6}{2ab^2x}}{}$$

wovon der Würfel und die erste Potenz in K gesetzt, V geben werden.

201. Zweytes Ex. H sey die Gleichung (194) und

K) $y^2=-\alpha x\;\Big\}\;-\beta$ $\quad y-\gamma x^2=-ax\;\Big\}\;-b$ $\quad y-cx^2\;\Big/\;-ex$ (196)

$-\varepsilon x$ $\qquad -\varphi$ $\qquad -f$

also T) $y=\frac{(\gamma-c)x^2+(\varepsilon-e)x+\varphi-f}{(a-\alpha)x+b-\beta}$

Dieser Werth in H gesetzt gibt:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(\gamma-c)x^2+(\varepsilon-e)x+\varphi-f)^2}{((a-\alpha)x+b-\beta)^2}\\ +a.\frac{(\gamma-c)x^3+a(\varepsilon-e)x^2+a(\varphi-f)x}{(a-\alpha)x+b-\beta}\\ +b.\frac{(\gamma-c)x^2+b(\varepsilon-e)x+b.(\varphi-f)}{(a-\alpha)x+b-\beta}\\ +cx^2+ex+f\end{array}\right\}=o$$

oder

oder

$$\left.\begin{array}{l}(y-c)^2\\ +a.(a-\alpha)\,(y-c)\end{array}\right\} x^4$$

$$\left.\begin{array}{l}+2.\,(y-c).\,(\varepsilon-e)\\ +a(a-\alpha).\,(\varepsilon-e)\\ +(a-\alpha).b.(y-c)\\ +(b-\beta).\,a\,(y-c)\end{array}\right\} x^3$$

$$\left.\begin{array}{l}+(\varepsilon-e)^2\\ +2.(y-c).(\phi-f)\\ +a(a-\alpha).(\phi-f)\\ +(a-\alpha).b.(\varepsilon-e)\\ +(b-\beta)\,(\varepsilon-e)\\ +(b-\beta).b.(y-c)\\ \qquad +c\end{array}\right\} x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}+2.\,(\varepsilon-e)\,(\phi-f)\\ +(a-\alpha).b.\,(\phi-f)\\ +(b-\beta)\,.\,(\phi-f)\\ +(b-\beta).b.(\varepsilon-e)\\ \qquad +e\end{array}\right\} x$$

$$+(\phi\,.\,f)^2$$
$$+(b-\beta).b.\,(\phi-f)=o$$
$$+f$$

Mehr Exempel und allgemeine Formeln hievon findet man in Newtons Ar. VII. 62. Seite in Gravesandes Ausg.

202. Zus. Wenn von drey Gleichungen A; B; C; jede drey unbekannte Grössen, x; y; z; enthält, so kann man aus A und B; z wegschaffen, oder eine neue D; machen, die blos x; y; enthält. Eben so kann man aus A und C; oder aus B und O; eine E machen, die blos x; y; enthält; und aus D und E, kann man y wegschaffen und eine F machen, die nur x enthält. Also läßt sich aus diesen drey Gleichungen eine einzige bestimmte machen, und zwo unbekannte Grössen lassen sich aus ihnen wegschaffen.

203. Zus. Hat man vier Gleichungen G, H, I, K, die vier unbekannte Grössen p; q; r; s; enthalten, so mache man nach 202 aus G; H; I; eine L; aus der p; q; weggeschafft sind; und aus H; I; K; eine M; aus der auch p; q; weggeschafft sind; so enthalten L; M; nur r; s; und man kann aus ihnen r wegschaffen, und eine O machen, die nur s enthält. Oder aus vier Gleichungen lassen sich drey unbekannte Grössen wegschaffen.

204. Zus. Eben so lassen sich vier unbekannte Grössen aus fünf Gleichungen wegschaffen, wenn man nach 203 mit der ersten, zweyten, dritten, vierten; und noch einmahl mit der zweyten, dritten, vierten, fünften, nach 199 aber mit den beyden Gleichungen, die man solchergestalt enthalten hat, verfährt.

205. Zus. Ueberhaupt erhellt, daß sich aus n Gleichungen n - 1 unbekanute Grössen wegschaffen lassen,

lassen, weil man aus 6 Gleichungen zweymahl 5 nehmen, und also 204 zweymahl anbringen kann, da denn die Sache für 6 Gleichungen aus 204 erfolgt, wie 204 aus 203 folgt. Nun kann man aus 7 Gleichungen zweymahl 6 nehmen, u. s. w.

206. Zus. Jede Gleichung bestimmt eine unbekannte Grösse, so daß man statt dieser unbekannten Grösse, nicht was man will setzen darf, sondern daß es nur einen oder etliche Werthe gibt, die der Gleichung genug thun, wie zweene bey der quadratischen Gleichung (78) davon auch welche, oder vielleicht alle, wie beyde in der quadratischen, unmöglich seyn können.

207. Zus. Eine Aufgabe ist bestimmt, wenn für sie soviel verschiedene Gleichungen gegeben sind, als bey ihr unbekannte Grössen vorkommen. Alsdenn kann man nähmlich aus allen diesen Gleichungen eine einzige bestimmte (73) machen; die von diesen unbekannten Grössen, welche man will enthält.

203. Anm. Ich sage, es müssen soviel Gleichungen gegeben seyn. Denn die man aus den gegebenen findet. wie C aus A; B; (196) bestimmen nichts mehr als was die gegebenen bestimmten. Dahin kann man auch rechnen, wenn aus einer Gleichung eine andere so wird, daß man auf beyden Seiten einerley addirt oder subtrahirt, denn da wird dieses addirte oder subtrahirte auf keine Weise durch die andere Gleichung bestimmt. Wenn A) $ac-ex=bx$ so addire man auf beyden Seiten cy; dieses gibt B) $ac-ex+cy=bx+cy$ aber B bestimmt y auf keine Art; und folglich darf man nicht aus den beyden Gleichungen

A; B; beyde unbekannte Grössen finden wollen, weil die zweyte nicht mehr als die erste bedeutet. So könnte man jedes Glied der Gleichung B; = f z setzen, und annehmen f z = a c - e x + c y; f z = b x + c y; oder C) f z + e x - c y = a c; D) b x + c y - f z = o; aber aus A; C; D; würden sich die drey unbekannten Grössen nicht bestimmen lassen, weil C; D; nichts weiter als A enthalten.

209. Anm. Wenn man acht gibt, wie sich Grössen durch die Subtraction, Division u. d. g. aufheben, so kann man oft in besondern Fällen eine unbekannte Grösse wegschaffen, ohne den Regeln Fuß für Fuß zu folgen. Es sey $ax = \frac{b^2 x - b^3}{x} = \frac{b^2 . (x - b)}{z}$ und $x = \frac{az}{x - b}$ so hat man gleiches mit gleichen multiplicirt, a x x = a b b oder x x = b b.

210. Grundf. In jeder bestimmten Gleichung gibt es einen oder mehr, mögliche oder unmögliche Werthe, für die unbekannte Grösse.

211. Zuf. Wenn für n unbekannte Grössen, soviel Gleichungen gegeben sind, so lassen sich n bestimmte Gleichungen finden, deren jede nur eine dieser unbekannten Grössen enthält. (206) Es gibt also Werthe für jede dieser unbekannten Grössen (210) oder man darf n Grössen als unbekannt annehmen, wenn man für sie nicht mehr als n Gleichungen annimmt.

212.

212. **Anm.** Ich sage hiemit nicht, daß es allemahl in unserer Gewalt stehe, diese Werthe zu finden. Bisher ist solches nur für die Fälle gewiesen, wo die bestimmte Gleichung, einfach oder quadratisch ist. (61. 78.)

213. **Zus.** Sind mehr Gleichungen als unbekannte Grössen, so ist die Aufgabe **mehr als bestimmt** (plusquam determinata,) man kann alsdenn nicht nur alle unbekannte bis auf eine, wie in (205) sondern überhaupt alle wegschaffen, und eine oder mehr Gleichungen zwischen den bekannten Grössen erhalten; dadurch ein Verhalten zwischen den bekannten Grössen bestimmt wird, das statt finden muß, wenn sich diese Gleichungen zusammen schicken sollen.

Ex. I) $a + x = b$; II) $xy = c$; III) $y - x = d$; Hier geben I und III addirt; $a + y = b + d$; also $y = b + d - a$ folglich aus II; $\frac{x = c}{b + d - a} = b - a$ aus I; Also können diese drey Gleichungen nicht statt finden, wofern nicht $c = (b-a)^2 + (b-a).d$ (IIII.) Haben aber die bekannten Grössen das Verhalten gegen einander, das die Gleichung IIII erfodert, so schicken sich I; II; III; zusammen, und können mit einander statt finden. Es sey $d = o$; so muß $c = (b-a)^2$ seyn, und die Gleichungen heissen I) $x = b - a$; II) $xy = (b-a)^2$; III) $y = x$ wo offenbahr II aus I; III; folgt; also kann c das $= xy$ seyn soll, nichts anders als $(b-a)^2$ seyn.

214. Aufg. Den Ursprung der quadratischen Gleichungen aus der Multiplication zu erklären.

Auflt. I. Man setze $x-a=P$; $x-b=Q$; so ist $P.Q=(x-a).(x-b)=x^2-ax+ab$. Dieses Product wird $=o$ wenn einer von seinen beyden Factoren $=o$ ist. Aber aus $P=o$ folgt $x=a$; aus $Q=o$, folgt $x=b$; Also wird $x^2-ax+b=o$ wenn $x=a$; oder $x=b$

II. Daß ein Product verschwindet, dazu ist genug wenn nur ein Factor in ihm $=o$ ist. Daher wird $P.Q=o$; wenn nur z. E. $P=o$ ist, obgleich alsdann nicht $Q=o$ sondern $Q=a-b$ ist.

III. Wenn ein einfacher Factor ein solcher heißt, der nur x von der ersten Abmessung enthält und so daß es nur 1 zum Cofficienten hat, dergleichen $x-a$; $x-b$; sind, so erhellt, daß ein Product aus zween solchen einfachen Factoren, $=o$ gesetzt, eine quadratische Gleichung nach 192; geordnet giebt, weil nun dieses Product $=o$ wird, nachdem einer oder der andere Factor $=o$ ist, so macht die Zahl die ein solches Product $=o$; macht, statt x gesetzt auch die Gleichung $=o$; oder sie ist der Gleichung Wurzel. (74).

IIII. Jedes Product von zwo Abmessungen wie P. Q. (II) kann also $=o$ gesetzt eine quadratische Gleichung werden, deren beyde Wurzeln a; b; sind.

V. Aber ist auch jede quadratische Gleichung ein Product aus zween einfachen Factoren? Diese Fra-

ge

ge zu beantworten, ſetze ich eine quadratiſche Gleichung ſey $x^2 + fx + g = o$ und will nun unterſuchen, ob das was hier linker Hand des Gleichheitszeichens ſteht, mit $x^2 - ax + ab$ allemahl einerley ſeyn kann. $-b$

VI. Dieſes wird geſchehen, wen $-a-b = f$; $+ab = g$ läßt ſich alſo dieſes beydes annehmen, wie groß auch f und g, ſeyn mögen, das iſt, laſſen ſich für jede f und g, auch a und b finden, ſo iſt die Frage (V) zu bejahen.

VII. Das könnte man nun ſchon aus 207; herleiten, weil für die beyden unbekannten Gröſſen, a; b; zwo Gleichungen gegeben ſind. Es iſt aber der Mühe werth dieſes noch umſtändlicher zu zeigen.

VIII. Nähmlich die quadratiſche Gleichung (V) aufgelöſt, giebt $x = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ff - g)}$ (78) Man ſetze nun

$$x + \tfrac{1}{2}f - \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = R$$
$$x + \tfrac{1}{2}f + \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = S$$

ſo kömmt $R.S = x^2 + \left.\begin{matrix} \frac{1}{2}fx \\ +\frac{1}{2}f \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x \\ -\frac{1}{2}f \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -x \\ +\frac{1}{2}f \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 - g)}$

$$+\tfrac{1}{4}f^2$$
$$-\tfrac{1}{4}f^2 + g$$

oder

$R.S = x^2 + fx + g$; und folglich kann man annehmen

$$\tfrac{1}{2}f - \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = -a$$
$$\tfrac{1}{2}f + \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = -b$$

da $-a-b=f$; und $+ab=g$
für jedes f u. g, giebt es also auch a u. b.

VIIII. Es ist klar daß wenn $R=○$ seyn soll, das x welches dieses thut, mit dem x das $S=○$ macht nicht einerley ist. Das wird aber auch nicht erfodert (II)

X. Was mit der Wurzelgrösse im Producte (VIII) multiplicirt wird, ist zusammen $=○$ daher sind des Products Coefficienten rational, wenn f; g, rational sind.

XI. Beyde Werthe von x (VIII) sind zugleich möglich oder unmöglich, nachdem $\frac{1}{4}f^2-g$ bejaht oder verneint ist. (33).

XII. Wenn beyde Werthe unmöglich sind, so ist sowohl R als S unmöglich, aber ihr Product möglich, weil sich das unmögliche bey der Multiplication aufhebt, und das Product hat nur mögliche Coefficienten, wenn f; g; möglich sind.

XIII. Exempel wo beyde Wurzeln unmöglich sind. $x^2-6x+16=○$; wo $x=3\pm\sqrt{-7}$;
Es ist hier $f=-6$; $g=16$

und

und $R = x - 3 - \sqrt{-7}$
$S = x - 3 + \sqrt{-7}$

$R.S = x^2 - 3 \rangle x - x \rangle . \sqrt{-7}$
$\quad\quad - 3 \rangle \quad + 3 \rangle$
$\quad\quad\quad\quad + x \rangle$
$\quad\quad\quad\quad - 3 \rangle$
$\quad\quad\quad\quad + 9 - (-7)$ (wegen 36).

Probe

$(3 \pm \sqrt{-7})^2 = 9 \pm 6\sqrt{-7} - 7$
$-6.(3 \pm \sqrt{-7}) = -18 \mp 6\sqrt{-7}$
$\quad\quad + 16 \quad\quad = +16$

$0 \quad = +25 - 25$

XIIII. Weil $\frac{1}{4}f^2$ allemahl bejaht ist (31) so kann die unbekannte Grösse keine unmögliche Werthe haben, wenn nicht $+g$ in V; eine verneinte Grösse ist (VIII)

XV. Insgemein trägt man diesen Ursprung der Gleichungen aus der Multiplication so vor: Man soll für die quadratische Gleichung zweene Werthe der unbekannten Grösse annehmen; als $x = a$; $x = b$; Diese auf Gleichungen, wo auf einer Seite o steht bringen $x - a = o$; $x - b = o$; und alsdenn mit einander multipliciren, da denn das Product auch $= o$ seyn werde. Hiegegen ist folgendes einzuwenden: 1) Wenn $x - a = o$; $x - b = o$, so muß in dem Producte $(x - a).(x - b)$ das x im ersten Factor $= a$; im zweyten $= b$ seyn. Was denkt man also dabey wenn man das erste x mit

dem zweyten multiplicirt x^2 nennt? Kann man a. b für ein Quadrat annehmen? 2) Weil $x - a = o$ mit $x = a$; und $x - b = o$ mit $x = b$ gleichgültig ist, warum rechnet man nicht so?

$$x = a$$
$$x = b$$
$$\overline{x^2 = ab}$$

Diese beyden Schwürigkeiten, denen der durchgängig gewöhnliche Vortrag ausgesetzt ist, werden von mir hier gehoben. Ich nehme nicht an daß zugleich $x - a = o$; $x - b = o$ seyn soll; es mag anfangs gar keines von beyden $= o$; Das erste etwa $= p$; Das andere $= q$ seyn. Das Product pq wird $= o$ wenn entweder $x = a$; allsdenn $q = a - b$; oder $x = b$ allsdenn $p = b - a$ ist; daher kann in dem Producte pq; der Theil x^2 ein Quadrat seyn, auch wenn dieses Product verschwinden soll; nähmlich das Quadrat entweder von a oder von b. Hieraus folgt nun gleich die Auflösung der zweyten Schwierigkeit. Ich multiplicire nicht $x - a$ mit $x - b$ in sofern jedes $= o$ ist; also ist mein Verfahren nicht eben das als ob ich $x = a$; $x = b$; setzte, sondern ich müßte $x = a + p$; $x = b + q$ setzen, und daraus folgte nicht $x^2 = ab$ sondern $x^2 = (a+p).(b+q)$

XVI. Die quadratische Gleichung $P.Q = o$ (I) hat also gewiß zwo Wurzeln, a; b; könnte sie ihrer bey eben den Coefficienten nicht mehr haben? Das ist: Wenn $x^2 + fx + g = R.S$ wo f und g gegeben sind, so beschaffen ist, daß $f = a + b$, $g = ab$

könn-

könnte nicht auch zugleich $f = c + d$; $g = cd$ seyn, so daß c; d; ganz andere Grössen als a und b wären? In diesen Falle würde R. S auch verschwinden wenn $x = c$ oder d; und die Gleichung $R.S = o$ hätte vier Wurzeln; a, b, c; d; Oder wenn wenigstens c allein, von a und b unterschieden, aber d etwa $= a$ wäre, so hätte diese Gleichung drey Wurzeln.

XVII. Dieses läßt sich folgender Gestalt entscheiden: Es sey $x - c = T$; $x - d = V$; $x^2 - cx - d + cd = T.V$; Ferner $c + d = a + b$; $cd = ab$; also $P.Q = T.V$; Ist nun $T = o$ also $T.V = o$, so muß auch $P.Q = o$ seyn; Folglich entweder $P = o$ oder $Q = o$; Denn wenn ein Product $= o$ ist, so muß gewiß ein Factor von ihm $= o$ seyn. Also ist für $x = c$; zugleich entweder $x = a$ oder $x = b$; das ist, weil einerley x hier durchgehends ist (XV) $c = a$ oder $= b$; Eben so folgt aus der Voraussetzung $V = o$; daß P oder $Q = o$; das ist wenn $x = d$; daß zugleich $x = a$ oder $= b$; folglich auch d entweder $= a$ oder $= b$; Es sind also c; d; keine andere Grösse als a und b; und die Gleichung (XVI) hat nicht mehr als zwo Wurzeln.

215. Erkl. Wenn eine Gleichung nach 192; IIII geordnet ist, daß auf einer Seite des Gleichheitszeichens, o steht, so heißt ihre Wurzel das was statt der unbekannten Grösse die x heissen mag gesetzt, macht daß sich alle Glieder aufheben, oder zu-

sammen = o werden. (74) Ist solches was unmögliches, so heißt es hier, eine unmögliche Wurzel. Wenn man also statt x etwas setzt, das keine Wurzel ist, so heben sich die Glieder nicht auf. Läßt sich das was auf einer Seite des Gleichheitszeichens dem o gegen über beysammen steht, als ein Product aus einfachen Factoren wie $(x - a).(x - b).(x - c)$ u. s. w. ansehen; so wird solches so oft, und nicht öfter = o; als einer dieser Factoren = o wird; und so viel unterschiedene Wehrte, hat x, daß es = a; = b; = c; u. s. w. wird, oder so oft wird es eine Wurzel. Es kann daher ein solcher Factor $x - a$ = o gesezt eine **Wurzelgleichung** genennt werden, und daher sagt man gewöhnlich: die Gleichung entstehe aus der Multiplication so vieler **Wurzelgleichungen**, soviel es solche Factoren giebt. Dieser ausdruck ist nicht völlig richtig; denn es kann auf einmahl nur eine Wurzelgleichung wahr seyn; es ist nicht zugleich $x - a = o$ und $x - b = o$ auser wenn $a = b$ (214; XV) aber man braucht auch diesen Ausdruck nie so, daß man dieses zugleich annähme. Man kann ihm die Bedeutung geben: Die Gleichung entsteht aus Factoren, von denen einer, welchen man will, = o seyn kann.

216. So hat jede quadratische Gleichung zwo Wurzeln, die beyde hier gleich möglich oder unmöglich sind (214; XI) und entspringt aus zwo Wurzelgleichungen, deren eine $x - a = o$; die andere $x - b = o$ ist. (214; XV)

217.

217. Zus. In der erwähnten quadratischen Gleichung ist des zweyten Gliedes Coefficient, die Summe der Wurzeln mit eingesetzten Zeichen oder die Summe der Grössen, welche den Wurzeln entgegengesetzt sind. Die Summe der Wurzeln selbst nähmlich wäre + a + b und des zweyten Gliedes Coefficient ist — a — b; Es ist klar, daß + a oder b, eines allein, oder eines wie das andere, was negatives bedeuten können, in welchem Falle — a; oder b; eines allein oder eines wie das andere positiv wären, der Satz aber doch wahr bliebe.

218. Zus Das letzte Glied der quadratischen Gleichung ist ein Product aus den Grössen, welche den Wurzeln entgegengesetzt sind.

I) $a = +7$; $b = +12$; so ist

$(x-7).(x-12) =$

$x^2 - 19x + 84$

II) $a = -9$; $b = +11$; so ist

$(x+9).(x-11) =$

$x^2 - 2x - 99$

III) $a = +9$; $b = -11$; so ist

$(x-9).(x+11) =$

$x^2 + 2x - 99$

IIII) $a = -5$; $b = -3$; so ist

$(x+5).(x+3) =$

$x^2 + 8x + 15$

Die Fälle sind nähmlich I. beyde Wurzeln positiv; IIII beyde negativ; II. die positive grösser; III; die negative grösser.

219. Aufg. Den Ursprung höherer Gleichungen aus der Multiplication zu erklären.

Auf. I. Man nehme soviel einfache Factoren, (214; III) als man will an: $x - a = A$; $x - b = B$; $x - c = C$; $x - d = D$ u. s. w. so ist

$$x^2 - a\,x + a\,b = A.B$$
$$-b$$

$$x^3 - a\,x^2 + abx - abc = A.B.C$$
$$-b \quad +ac$$
$$-c \quad +bc$$

$$x^4 - a\,x^3 + abx^2 - abc\,x + abcd = A.B.C.D$$
$$-b \quad +ac \quad -abd$$
$$-c \quad +bc \quad -acd$$
$$-d \quad +ad \quad -bcd$$
$$+bd$$
$$+cd$$

u. s. w.

II. So entsteht immer ein Product, in dem x einen Grad höher steigt, wenn man das nächstvorhergehende, mit einem neuen Factor multiplicirt. Ist $x - e = E$ so gibt A.B.C.D.E ein Product von fünf Abmessungen, in dem x auf die fünfte Potenz; steigt u. s. w.

III. Wenn von diesen einfachen Factoren, einer $= o$; so verschwindet das Product, in dem er vorkömmt.

kömmt. Das ist, es wird eine Gleichung, davon der Factor eine Wurzelgleichung, und der Wehrt von x, welchen dieser Factor = ○ gesetzt gibt, die Wurzel ist. Diese Gleichung ist also von dem Grade, von dem das Product ist, und hat soviel Wurzeln, und Wurzelgleichungen, soviel das Product Factoren hat, das ist soviel der Exponent ihres Grades Einheiten hat.

III. Wenn z. E. D = ○; so wird A. B. C. D = ○; welches eine Gleichung vom vierten Grade giebt; ihre vier Wurzelgleichungen sind A = ○; oder B = ○; oder C = ○; oder D = ○; und daher ihre vier Wurzeln x = a; oder = b; oder = c; oder = d. Nähmlich, d statt x in dem Product A. B. C. D; setzen, heißt so viel als in diesem Product den Factor D = ○ setzen, wodurch das Product = ○ wird, die übrigen Factoren mögen seyn was sie wollen; und so mit den übrigen.

220. Lehrs. Wenn $x^3 + px^2 + qx + r = y$ so kann y als ein Product aus drey einfachen Factoren A. B. C; (219) angesehen werden.

Bew. Hier sind die drey Coefficienten p; q; r; gegeben, und soll y mit A. B. C verglichen werden, so setzt man

$p = -a-b-c$; $q = ab+ac+bc$;

$r = -abc$; Man darf aber drey Grössen a, b, c, zu bestimmen annehmen, wenn für sie nicht mehr als drey Gleichungen gegeben sind (211) folglich kann man allemahl annehmen, y entstehe aus der

Mul-

Multiplication dreyer Factoren.

221. Lehrs. Wenn

P) $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \ldots + \pi x^{m-n} + \varrho x^{m-n-1} \ldots + \int x^2 + tx + u = y$ wo die Coefficienten alle als gegeben angesehen werden, so läßt sich y allemahl als ein Product von m einfachen Factoren betrachten.

Bew. Das Product so vieler einfachen Factoren, enthält, erstlich x^m in 1 multiplicirt, und denen, alle niedrigern Potenzen von x, bis mit auf die, welche ○ zum Exponenten hat, jede mit einen Coefficienten, der durch a; b; c; u. s. w. gegeben ist; dieser Coefficienten sind daher soviel als der niedrigern Potenzen von x; nähmlich m; Nun enthält y nach eben der höchsten Potenz, von x eben diese niedrigeren Potenzen mit eben so viel Coefficienten. Wenn man also jedes Glied des Products, dem Gliede von y, das eben die Potenz von y hat, gleich setzt, so bekömmt man eine Gleichung die man mit der nur genannten Potenz dividiren kann, und die folglich eine Gleichung zwischen einem Coefficienten von y, und einem durch a, b, c, . . . gegebenen Coefficienten des Products ist. Solcher Gleichungen giebt es also m; und eben so viel Grössen a, b, c, ... enthält das Product aus m einfachen Factoren. Man kann also soviel solcher Grössen annehmen, (211) das ist y als ein Product aus soviel Factoren ansehen.

222. Lehrs. Wenn y; aus m einfachen Factoren A. B. C. . . entsteht, so hat es nicht noch einen

ans

andern Factor, der unter diesen m nicht zu finden wäre.

Bew. Es sey $x = (x - \alpha)$. Z und ich lasse jezt noch unausgemacht, ob der in Z multiplicirte einfache Factor unter den andern m zu finden seyn soll: Für $x - \alpha = o$ wird $x = o$ folglich A. B. C... $= o$ folglich einer dieser m Factoren $= o$; Weil ein Product nicht $= o$ wird, wenn gar kein Factor von ihm $= o$ ist. Dieser Factor von den m; der $= o$ wird, sey A; also ist zugleich $x - \alpha = o$ und $x - a = o$, folglich $x = \alpha$ und $x = a$. Daher ist jeder einfache Factor von y unter den m enthalten.

223. Lehrs. Eine Gleichung von m Graden, hat nicht mehr noch weniger Wurzeln, als m.

Bew. In 221; giebt $y = o$ gesetzt eine solche Gleichung, die ich P nennen will. Es ist aber y allemahl ein Product aus m einfachen Factoren, (221) und nicht mehrern (222) und jeder Factor für sich allein $= o$ gesetzt, macht das Product $y = o$, ist also unter dieser Voraussetzung eine Wurzelgleichung und der Werth von x den man solchergestalt bekomt eine Wurzel der Gleichung P.

224. Lehrs. Wenn man statt der Wurzeln, die Grösse annimt die ihren entgegengesetzt sind, nähmlich $- a$; $- b$; u. s. w. Da die Wurzeln $+ a$; $+ b$; u. s. w. sind; So ist in der Gleichung P (221) der Coefficient

bey der Potenz; oder des

$m-1$ zweyten

Gliedes p = der Summe dieser Grössen;

$m-2$ dritten $\cdot\cdot\cdot$ q = d. S. der Producte aus allen Paaren dieser Grössen oder allen ihren Verbindungen nach 2;

$m-3$ vierten $\cdot\cdot\cdot$ r = d. S. aller Producte von 3 solchen Grössen, oder aller Verbindungen dieser Grössen nach 3;

$m-4$; fünften $\cdot\cdot\cdot$ s = d. S. a P. d. G. nach 4;

$m-5$; sechsten $\cdot\cdot\cdot$ t = d. S. a. P. d. G. nach 5;

$m-n$; $n+1$ten; π = d. S. a. d. P. G. n. n

$m-(n+1)$ $n+2$ten; ϱ = d. S. a. P. d. G. nach $n+1$

$m-m$; $m+1$ten; = dem Producte aus allen diesen Grössen; oder ihrer Verbindung nach m;

Der Beweis erhellt aus dem Verfahren (219). So sind bey C; die Coefficienten des zweyten, dritten, vier-

vierten, fünften oder letzten Gliedes so beschaffen, wie sie angegeben werden.

Die Allgemeinheit des Satzes erhellt folgender Gestalt: Wenn man das was in 221, so groß als y ist; und als ein Product aus m einfachen Factoren kann angesehen werden (222) mit einen neuen Factor x - f multiplicirt, so entsteht

$$\text{R)}\quad \overset{m+1}{x} + \overset{m}{p}x + \overset{m-1}{q}x \cdots + \varrho\, x^{m-n} - f - fp \qquad - t\pi \ldots = y.(x-f)$$

welches = o gesetzt, eine Gleichung vom Grade m + 1 giebt, die ich R nennen will; Sie enthält alle Wurzeln der Gleichung P; und noch über diese die m + 1te Wurzel x = f. Ist nun das angegebene Gesetz der Coefficienten bey P wahr, so muß es auch bey R wahr seyn. Denn wenn π die Summe aller Verbindungen nach n; von den Grössen ist, welche den Wurzeln der Gleichung P entgegengesetzt sind; so kömmt zu jeder solcher Verbindung, die in π enthalten ist, noch - f in - fπ; also bestehet fπ aus allen denjenigen Verbindungen nach n + 1 der Grössen, welche der Gleichung R Wurzeln entgegengesetzt sind, in denen - f, oder die der Wurzel f entgegengesetzte Grösse enthalten ist; Aber ϱ besteht aus allen Verbindungen nach n + 1 von den Grössen, welche der Gleichung P Wurzeln entgegengesetzt sind; d. i. von den Grössen, welche allen übrigen Wurzeln der Gleichung R : f ausgenommen, entgegengesetzt sind: Also enthält ϱ - fπ alle Verbindungen nach n + 1 von allen Grössen, welche den Wur-

zeln der Gleichung R entgegengesetzt sind; Es gehört aber $\varrho - f\pi$ in R zu der Potenz $m-n$ wie π in P zu eben der Potenz gehörte: Aus der Gleichung P höchsten Exponenten m; wird $m-n$, wenn man n davon abzieht; Soll eben das ans der Gleichung R höchsten Exponenten $m+1$ werden, so muß man von ihm $n+1$ abziehen; also ist π die Summe aller Verbindungen der Grössen, welche der Gleichung P Wurzeln entgegengesetzt sind, nach der Zahl, die man von der Gleichung P höchsten Exponenten abziehen muß, um $m-n$ zu erhaiten; und $\varrho - f\pi$ ist die Summe aller Verbindungen der Grössen, welche der Gleichung R Wurzeln entgegengesetzt sind, nach der Zahl, die man von der Gleichung R höchsten Exponenten abziehen muß, um $m-n$ zu erhalten; daß also das Gesetz für π und für $\varrho - f\pi$ mit Worten ausgedruckt einerley ist. Oder man kann auch so sagen: π ist der Coefficient des nten Gliedes von P; und $\varrho - f\pi$ des $n+1$ten Gliedes von R; Aber π ist die Summe aller Verbindungen der Grössen, welche der Gleichung P Wurzeln entgegengesetzt sind nach n; und $\varrho - f\pi$ die Summe aller Verbindungen der Grössen, welche der Gleichung R Wurzeln entgegengesetzt sind, nach $n+1$ folglich werden wiederum π in der Gleichung P und $\varrho - f\pi$ in der Gleichung R nach einem Gesetze bestimmt. Wenn also das angenommene Gesetz von einer Gleichung wahr ist, so ist es von der nächsthöhern wahr. Es ist aber, wie die Rechnung zeigt, von C (218) wahr; also wenn C statt P gebraucht wird, von der Gleichung

chung des fünften Grades, die jetzo R heißt; und wenn diese Gleichung des fünften Grades nun P heißt, von der des sechsten Grades, die alsdenn R heißt, u. s. w. ohne Ende.

Ex. Es sey aus 218. III. Ex.

A) $x^2 + 2x - 99 = 0$

$x - 7 = 0$

B) $x^3 - 5x^2 - 113x + 693 = 0$

$x - 2 = 0$

C) $x^4 - 7x^3 - 103x^2 + 919x - 1386 = 0$

Hier sind der Gleichung C Wurzeln (219) $a = 9$; $b = -11$; $c = +7$; $d = +2$; die ihnen entgegengesetzten Grössen, -9; -7; -2; $+11$; derselben Summe $= -7$; die Summe ihrer Paare 11. -2; 11. -7; 11. -9; $-2.-7$; $-2.-9$; $-7.-9$; $= -103$ die Summe ihrer Verbindungen nach dreyen; 11. $-2.-7$; 11. $-2.-9$; 11. $-7.-9$; $-2.-7.-9$; $= +919$; das Product aus allen $-9.+7.-2.11 = -1386$.

225. Zus. Wenn in einer Gleichung das zweyte Glied fehlt, so ist die Summe der Wurzeln $= 0$; fehlt aber das letzte Glied, so ist eine Wurzel $= 0$; (3) alsdenn enthält nähmlich jedes Glied die unbekannte Grösse, und wird folglich für sich $= 0$ wenn man sie $= 0$ setzt. In diesem Falle läßt sich die Gleichung mit ihr dividiren, und dadurch auf einen Grad niedriger bringen.

Er, $x^3 * - 31x + 30 = o$ kömmt aus $(x-1)(x-5)$ oder $x^2 - 6x * 5$ mit $x + 6$ multiplicirt, und hat also $+1, + 5; - 6$; zu Wurzeln, da die Summe der beyden bejahten, der verneinten gleich ist.

$y^3 + 7y^2 + 5y = o$ wird $= o$ wenn $y = o$; und läßt sich auf $y^2 + 7y + 5 = o$ bringen.

226. Zus. Wenn man eine Gleichung durch eine ihrer Wurzelgleichungen dividirt, so geht die Division auf, und es kömmt die nächstniedrigere heraus, die mit der Wurzelgleichung multiplicirt, die Gleichung hervorbrachte.

$$
\begin{array}{l|l}
 & (x^3 - 5x^2 - 113 + 693 \\
x-2 & x^4 - 7x^3 - 103x^2 + 919x - 1386 \\
 & \underline{x^4 - 2x^3} \\
 & * \quad -5x^3 - 103x^2 \\
 & \quad \underline{-5x^3 + 10x^2} \\
 & \quad * \quad -113x^2 + 919x \\
 & \quad\quad \underline{-113x^2 + 226x} \\
 & \quad\quad * \quad +693x - 1386 \\
 & \quad\quad\quad \underline{+693x - 1386} \\
 & \quad\quad\quad * \quad\quad *
\end{array}
$$

227. Zuſ. Eben ſo gibt eine Gleichung H die ein Product aus zwo andern höhern iſt, durch eine F; dividirt, die andere G;

G) $z^2 - z - 2$

F	H
$z^3 - 5z^2 - 113z + 693$	$z^5 - 6z^4 - 110z^3 + 816z^2 - 467z - 1386$

$z^5 - 5 \quad - 113 \quad + 693$

$* \quad -z^4 + 3z^3 \quad + 123z^2 - 467z$

$-1 \quad + 5 \quad + 113 \quad - 693$

$* \quad -2z^3 \quad + 10z^2 + 226z - 1386$

$-2 \quad + 10 \quad + 226 \quad - 1386$

0

Betrach=

Betrachtungen über die Irrationalwurzeln der Gleichungen.

228. Lehrs. Von einer Irrationalzahl, deren Quadrat rational ist, wie $\sqrt{a}$; ist jede gerade Potenz rational; jede ungerade irrational.

Bew. Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so ist $(\sqrt{a})^{2n} = (a^{\frac{1}{2}})^{2n}$ (Ar. II. 9, 8.) $= a^{n}$; eine Potenz der Rationalzahl a; folglich rational: Aber $(\sqrt{a})^{2n+1} = (\sqrt{a})^{2n} \cdot \sqrt{a}$ (Ar. II; 7) $= a^{n} \cdot \sqrt{a}$ irrational.

229. Zus. Wenn c eine Rationalzahl bedeutet, so ist in jeder Potenz von $c + \sqrt{a}$; das erste, dritte, u. s. w. jedes ungerade Glied, rational, und das zweyte, vierte u. s. w. jedes gerade, irrational. Erhellt aus 141; c und $\sqrt{a}$ statt des dortigen a und b gesetzt.

230. Lehrs. Von einer unmöglichen Zahl, deren Quadrat möglich ist, wie $\sqrt{-e}$ (36) sind alle gerade Potenzen möglich, alle ungeraden unmöglich.

Bew. Ihr Quadrat ist $-e$; und jede gerade Potenz des Exponentens 2n, ist die Potenz n ihres Quadrats; z. E. die sechste Potenz, wo $n = 3$; ist der Würfel ihres Quadrats; also sind alle gerade Potenzen möglich. Jede ungerade ist ein Product

aus

aus der nächstvorhergehenden geraden, die möglich war, in die unmögliche Grösse selbst, z. E. $(\sqrt{-e})^5 = (\sqrt{-c})^4 . \sqrt{-e}$ und also unmöglich, weil ein Product aus dem Möglichen in das Unmögliche, dem Begriffe der Multiplication gemäß (Ar. I. 8.) den unmöglichen Factor eben so enthält wie der mögliche die Einheit, also ihn selbst enthält, folglich unmöglich ist.

Es ist nähmlich $(\sqrt{-e})^{2n} = ((\sqrt{-e})^2)^n$ (Ar. II. 7.) $= (-e)^n$, positiv oder negativ, nachdem n gerade oder ungerade ist. Aber das Quadrat von $(-e)^n$ allemahl positiv und $= +e^{2n}$ weun auch $(-e)^n$ verneint ist (31) ferner $(-e)^{2n+1} = (-e)^n . \sqrt{-e}$ (Ar. II. 7.) $= \sqrt{[((-e)^n)^2 . -e]}$ (26) $\sqrt{(+e^{2n} . -e)}$ $= \sqrt{-e^{2n+1}}$

231. Zus. In $(c+\sqrt{-e})^n$ sind alle ungeraden Glieder möglich, und alle geraden unmöglich. Jene nähmlich enthalten lauter gerade, diese lauter ungerade Potenzen der unmöglichen Grösse, wie in 229.

232. Zus. Die Sätze 229; 231; gelten auch von $c+b\sqrt{a}$; $c+b\sqrt{-e}$ da der rationale Factor b; nichts in ihrem Beweise ändert.

233. Lehrs. Wenn $c+b\sqrt{a}$ eine Wurzel einer Gleichung ist, deren Coefficienten alle rational sind, so hat eben die Gleichung auch $c-b\sqrt{a}$ zur Wurzel.

Bew. Die Gleichung sey $x^3 + px^2 + qx + r$ und der Kürze wegen $\sqrt{a} = \pi$; Man seße $c + b\pi$ statt x; so ist

$$\left.\begin{array}{lll} (c+b\pi)^3 = & c^3 + 3c^2 & \left.\begin{array}{l} b\pi + 3c \\ + p \end{array}\right\} b^2\pi^2 + b^3\pi^3 \\ p.(c+b\pi)^2 = & pc^2 + 2cp & \\ q.(c+b\pi) = & qc + q & \\ r = & r & \end{array}\right\} \text{(F}$$

Hier sind nun wegen der rationalen Coefficienten die erste und dritte Columne oder die ungeraden rational, aber die zweyte und vierte oder die geraden irrational. (232) Nun können das Rationale und das Irrationale nicht zusammen = ○ seyn, oder, welches eben soviel gesagt ist, wenn man das Irrationale mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite des Gleichheitszeichen brächte, so kann es dem Rationalen nicht gleich seyn, weil dieses von der Einheit sich ausmessen läßt, jenes aber nicht. (Ar. IIII. 26.) damit also die Gleichung F; oder die ihr gleichgültige

$$\text{G)} \quad \left.\begin{array}{l} c^3 + 3c \\ + pc^2 + p \\ + qc \end{array}\right\} b^2\pi^2 = -\left\{\begin{array}{l} + 3c^2 \\ + 2cp \\ + q \end{array}\right\} b\pi - b^3\pi^3$$

statt findet, so muß, was in der Gleichung G auf jeder Seite des Gleichheitszeichens steht, für sich = ○ seyn, damit sie sich in ○ = ○ verwandelt. Also ist das Rationale für sich = ○; und das Irrationale gleichfalls, oder es ist

$$0 = r$$

$$o = -\left\{\begin{matrix} 3c^2 \\ +2cp \\ +q \end{matrix}\right\} b\pi - b^3\pi^3$$

oder . der Gleichung F ungerade Columnen, sind für sich zusammen = o; und die geraden Columnen für sich zusammen auch. Wenn man nun $c - b\pi$ statt x setzt, so kömmt eine Gleichung H, heraus, die von F nur darinnen unterschieden ist, daß ihre geraden Columnen, der geraden Columnen in F entgegengesetzte Grössen sind, die ungeraden Columnen aber sind in beyden völlig einerley

$$\begin{array}{lll} (c - b\pi)^3 = & c^3 - 3c^2 & b\pi + 3c \\ p.(c - b\pi)^2 = & +pc^2 - 2cp & +p \\ q.(c - b\pi) = & +qc - q & \\ r = & +r & \end{array} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} b^2\pi^2 - b^3\pi^3 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (H$$

die geraden Columnen der Gleichung F nähmlich sind Producte aus gegebenen Grössen in ungerade Potenzen von $+ b\pi$; und die geraden Columnen der Gleichung H; Producte aus eben den gegebenen Grössen, in eben die ungerade Potenzen von $- b\pi$ d. i. in Grössen, die den geraden Potenzen von $+ b\pi$ entgegengesetzt sind. (31) Aber die geraden Columnen beyder Gleichungen sind Producte aus einerley gegebenen Grössen, in einerley geraden Potenzen von $+ b\pi$ oder von $- b\pi$; d. i. in Grössen, die einerley Zeichen haben. (31). Sind also die geraden Columnen der Gleichung F für sich zusammen = o; so müssen auch die geraden

Columnen der Gleichung H auch für sich zusammen = o seyn; und die ungeraden Columnen in jeder Gleichung sind auch für sich = o; d. i. Wenn die Gleichung F wahr ist, so muß auch H wahr seyn. Es ist klar, daß die cubische Gleichung blos der Deutlichkeit wegen als ein Exempel ist gebraucht worden, übrigens aber ihre bestimmte Abmessung in den Beweis keinen Einfluß hat. Der Beweis kömmt nähmlich blos auf die Beschaffenheit der geraden und ungeraden Columnen an, die in jeder Gleichung, von welchem Grade sie auch ist, einerley bleibt.

233. Ex. In $x^3 - 5x^2 - 8x - 2$ setze man statt x die eine Wurzel $3 + \sqrt{11}$ so kömmt

F) $+27 \quad +27 \quad \sqrt{11} + 99 + 11\sqrt{11} = 0$
$-45 \quad -30 \quad -55$
$-34 \quad -8$
-2

wo $27 - 45 - 24 - 2 + 99 - 55 = 0$; und $27 - 30 - 8 + 11 = 0$; also die Gleichung noch bleibt, wenn in sie auch $-\sqrt{11}$ statt $+\sqrt{11}$ gesetzt wird.

234. Zus. Eine Gleichung, die $c + b\pi$ zur Wurzel hat, läßt sich durch die quadratische $(x - c - b\pi)$. $(x - c + b\pi)$ oder $x^2 - cx + c^2 - b^2\pi^2$ deren Coefficienten alle rational sind, dividiren. (226; 227)

235. Lehrs. Eine Gleichung, deren Wurzel $c + b\sqrt{-e}$ ist, hat auch $c - b\sqrt{-e}$ zur Wurzel. Der Beweis wird aus 231. hergeleitet, wie

der

der 232 aus 229, und ist mit denen 232. völlig einerley, wenn man nur möglich; unmöglich; statt rational; irrational setzt.

236. Zus. Sie läßt sich durch die Gleichung $(x-c-b\sqrt{-e}) \cdot (x-c+b\sqrt{-e})$ oder $x^2 - 2cx + c^2 + b^2 e$, in der alle Coefficienten möglich sind, dividiren (226; 227.)

237. Lehrs. Jede reine Gleichung (73) von einem geraden Exponenten, hat nur zwo mögliche, entgegengesetzte sonst gleiche Wurzeln: Jede von einem ungeraden nur eine mögliche.

Bew. I. Man setze statt z alle mögliche Zahlen nach der Reihe, so ist klar, daß z^{2n}; und z^{2n+1} wachsen, wenn z wachsen. Wenn nun $z^{2n} - a = o$ oder $z^{2n} = a$; so gebe ein gewisser positiver Werth von z; z. E. c; $c^{2n} = a$; also gibt ein grösseres z als c war, diese Potenz; grösser als a; und ein kleineres kleiner. Folglich gibt es nur einen positiven Werth von $z = c$ dessen Potenz $2n = a$; ist. Aber $(-c)^{2n} = (+c)^{2n}$ (32) folglich thut eben der Werth negativ genommen, auch der Gleichung genug, und wieder kein anderer negativer.

II. Wenn $z^{2n+1} - a = o$; so gibt es nur einen Werth von z, der $z^{2n+1} = a$ macht, und dieser Werth ist positiv oder negativ, nachdem a in der letz-

letzten Gleichung was positives oder negatives ist, (31) also hat die Gleichung nur eine mögliche Wurzel.

238. Zus. Die gerade Gleichung hat $2n-2$ und die ungerade $2n$ unmögliche Wurzeln. (223)

239. I. Exempel. $z^4 - e^4 = 0$; davon sind die zwo möglichen Wurzeln $z = \pm e$ und die Gleichung läßt sich also durch $(z-e) \cdot (z+e)$ oder $z^2 - e^2$ dividiren. (223) Aus Ar. II. 5. erhellt, daß $z^4 - e^4 = (z^2 + e^2) \cdot (z^2 - e^2)$ Also ist die reine biquadratische Gleichung ein Product aus $z^2 - e^2 = 0$ in $z^2 + e^2 = 0$; der letzten Gleichung Wurzeln sind $z = \pm\sqrt{-e^2}$ und dieses sind auch die unmöglichen Wurzeln der biquadratischen. Es ist nähmlich $(\pm\sqrt{-e^2})^2 = -e^2$ (36) und also $(\pm\sqrt{-e^2})^4 = (-e^2)^2 = +e^4$ Hieraus läßt sich eine scheinbare Ungereimtheit heben. Man kann nähmlich schliessen: $\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ (Ar. II; 9.) $= (-1)^{\frac{2}{4}}$ (Ar. I. 68.) $= ((-1)^2)^{\frac{1}{4}}$ (Ar. II. 9.) $= (+1)^{\frac{1}{4}}$ (31) oder $\sqrt{-1} = \sqrt[4]{+1}$; das unmögliche, wie es scheint, dem Möglichen gleich. Wenn man hier $e = 1$ setzt, so erhellt, daß einer der vier Werthe der Biquadratwurzel von $+1$; der gefundene unmögliche ist; weil diese Biquadratwurzel nicht einen einzigen, sondern vier Werthe, und darunter zweene unmögliche hat. Man setzt also hier nicht

eine

eine mögliche Biquadratwurzel etwas Unmöglichen gleich, sondern man findet einen der unmöglichen Werthe der Biquadratwurzel.

240. II. Ex. $y^3 - f^3 = 0$; davon ist gewiß eine mögliche Wurzel $y = f$; also muß sich die Gleichung mit $y - f$ dividiren lassen. (227) Man findet aber

$$\begin{array}{l|l} y - f & y^3 - f^3 \quad (y^2 + fy + f^2 \\ & y^3 - fy^2 \\ \hline & * \quad + fy^2 - f^3 \\ & \quad + fy^2 - f^2y \\ \hline & * \quad + f^2y - f^3 \\ & \quad + f^2y - f^3 \\ \hline & * \end{array}$$

Der Gleichung $y^2 + fy + f^2 = 0$ Wurzeln sind $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{-\frac{3}{4}f^2} = +f.\frac{(-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$ die beyden unmöglichen Wurzeln der cubischen Gleichung.

241. So ist für $y^3 - 8 = 0$; $f = 2$; und die beyden unmöglichen Wurzeln sind $-1 \pm \sqrt{-3}$. Es ist nähmlich (Ar. IIII; 28. und hier 26:) $(-1 \pm \sqrt{-3})^3 = -1 \pm \sqrt{-3} - 3. - 3 \pm 3\sqrt{-3} = 8$.

242. Anm. Diese Exempel zeigen, woher die Mannigfaltigkeit, und die Unmöglichkeit der Wurzeln

zeln rühret, und warum die Gleichungen auf den oder jenen Grad steigen. Wer nach der Cubikwurzel der 8 fragt, denkt vielleicht an nichts weiter als an die 2: da aber auser der 2 noch zwo unmögliche Grössen sind, deren Würfel auch 8 ist, so kann er keine Gleichung für die Cubikwurzel der 8 finden, die nicht nebst der 2 auch noch diese beyden unmöglichen Grössen enthielte. Er fragt nähmlich dreyerley, auch wenn er nur einerley zu fragen glaubt und muß folglich drey Antworten, eine für jede seiner Fragen erhalten. Zugleich fodern zwo von seinen Fragen vermöge 237. II. was Unmögliches, und er bekömmt auch unmögliche Antworten.

243. Lehrsatz. Wenn ε eine ganze Zahl bedeutet, so läßt sich $r^{\varepsilon} - 1$ mit $r - 1$ dividiren, daß die Division aufgeht, und der Quotient ist $r^{\varepsilon-1} r^{\varepsilon-2} r^{\varepsilon-3} \ldots + 1$ wie sich leicht aus (6) erweisen läßt. Nun sey $r = \frac{b}{a}$ so läßt sich auf eben die Art $\frac{b^{\varepsilon}}{a^{\varepsilon}} - 1$ mit $\frac{b}{a} - 1$

d. i. $\frac{b^{\varepsilon} - a^{\varepsilon}}{a^{\varepsilon}}$ mit $\frac{b-a}{a}$ oder $\frac{b^{\varepsilon} - a^{\varepsilon}}{a^{\varepsilon-1}}$ mit $b - a$

dividiren, und der Quotient ist $\frac{b^{\varepsilon-1}}{a^{\varepsilon-1}} + \frac{b^{\varepsilon-2}}{a^{\varepsilon-2}} \ldots + 1$;

+ 1; dieser Quotient mit $a^{\varepsilon-1}$ multiplicirt,

gibt $\frac{b^{\varepsilon} - a^{\varepsilon}}{b - a} = b^{\varepsilon-1} + ab^{\varepsilon-2} + a^2 b^{\varepsilon-3} \ldots + a^{\varepsilon-1}$

244. Lehns. Eben so findet man

$$r+1 \;\Big|\; r^{\varepsilon} - 1 \qquad \left(r^{\varepsilon-1} - r^{\varepsilon-2} + r^{\varepsilon-3} - r^{\varepsilon-4} \ldots \right.$$

$$r^{\varepsilon} + r^{\varepsilon-1}$$

$$* - r^{\varepsilon-1}$$

$$- r^{\varepsilon-1} - r^{\varepsilon-2}$$

$$* + r^{\varepsilon-2}$$

$$+ r^{\varepsilon-2} + r^{\varepsilon-3}$$

$$* - r^{\varepsilon-3}$$

Wo der erste, dritte, u. s. w. alle ungerade Reste verneint sind, und mit r dividirt den zweyten, vierten, u. s. w. alle geraden Theile des Quotienten geben, die also auch verneint sind. Unter diesen Theilen des Quotienten kömmt man auf r° oder 1; und zwar auf - 1 wenn ε gerade ist, weil alle Theile des Quotienten verneint sind, die $\varepsilon - 2$; $\varepsilon - 4$; u. s. w. oder ε um was gerades vermindert, zu Exponenten haben,

haben, und also in diesem Falle der Theil, der $\varepsilon - x$ zum Exponenten hat, auch verneint ist. Diese -1 nun mit $r + 1$ dem Divisor multiplicirt, gibt $-r-1$; Aber $-r$ war der Rest, der mit r dividirt sie gab; und -1 ist ein Theil des Dividendus, den die Division bisher noch nicht betroffen hat, folglich ist das Product der -1 in den Quotienten dem Reste gleich, und die Division geht auf, der Quotient aber ist

$\varepsilon-1 \quad \varepsilon-2 \quad \varepsilon-3 \quad \varepsilon-4$

$r - r + r - r \ldots + r - 1$ Wenn aber ε ungerade ist, so ist im Quotienten $+1$ und die Division geht nicht auf. Also ist für ein gerades ε;

$$\frac{b^{\varepsilon} - a^{\varepsilon}}{b + a} = b^{\varepsilon-1} - ab^{\varepsilon-2} + a^2b^{\varepsilon-3} - a^3b^{\varepsilon-4} \ldots + a^{\varepsilon-2}b - a^{\varepsilon-1}$$

wie in 243;

245. Lehn. Eben so ist für ein ungerades ε;

$$\frac{r^{\varepsilon} + 1}{r + 1} = r^{\varepsilon-1} - r^{\varepsilon-2} + r^{\varepsilon-3} \ldots + 1 \text{ und}$$

$$\frac{b^{\varepsilon} + a^{\varepsilon}}{b + a} = b^{\varepsilon-1} - ab^{\varepsilon-2} + a^2b^{\varepsilon-3} - a^3b^{\varepsilon-4} \ldots + a^{\varepsilon-1}$$

246. Lehns. Und für ein gerades ε; $\frac{r^{\varepsilon} - 1}{r^2 - 1}$

$= r^{\varepsilon-2} + r^{\varepsilon-4} + r^{\varepsilon-6} \ldots + 1$ und $\frac{b^{\varepsilon} - a^{\varepsilon}}{bb - aa}$

$= b^{\varepsilon-2}$

$$= b^{\varepsilon-2} + a^2 b^{\varepsilon-4} + a^4 b^{\varepsilon-6} \cdot \cdot \cdot + a^{\varepsilon-2}$$

247. Lehns. Wenn A eine Grösse ist, die keine andere Potenz von a, als die deren Exponent die gerade Zahl ε ist, enthält, und wenn sich A mit $b^2 - a^2$ dividiren läßt, daß die Division aufgeht; so kann A nichts anders als der Dividendus 246; und folglich der Quotient auch nichts anders als der daselbst gefundene seyn. Wenn P eine Grösse bedeutet, die nichts von a enthält, so soll $A = P \pm a\varepsilon$ seyn. Aber das obere Zeichen für die Potenz von a läßt sich nicht behalten, wenn A sich mit $b^2 - a^2$ soll dividiren lassen. Aus den Regeln der Division nähmlich erhellt, (6) daß alle Theile des Quotienten bejaht werden. Jeder Theil gibt, mit dem Divisor multiplicirt, ein Product, dessen erstes Glied dem nächstvorhergehenden Reste gleich ist; aus welchem man diesen Theil gefunden hatte, das zweyte Glied gibt entweder einen neuen Rest, oder wenn es keinen Rest geben, und die Division aufgehen soll, so muß es so groß als das Stück von A seyn, das die Division noch nicht betroffen hatte. Dieses zweyte Glied aber ist allemahl verneint, und kann also dem genannten Stücke von A nicht gleich seyn, wenn solches nicht auch verneint ist.

Nun folgt aus den Regeln der Division, daß der Quotient $\frac{P}{b^2} + \frac{a^2P}{b^4} \ldots + \frac{a^{2n}P}{b^{2n+2}}$ seyn wird. Soll also dieser Theil des Quotienten der letzte seyn, so ist $\frac{a^{2n}P}{b^{2n+2}} \cdot - a^2 = -a^\varepsilon$; d. i. weil P; b; nichts von a enthalten; $2n+2 = \varepsilon$; und $P = b^e$; also $A = b^\varepsilon - a^\varepsilon$. Dieser Satz ist der umgekehrte (conuersa) von 246. Und eben so lassen sich die übrigen umkehren. Z. E. 245; Soll eine Grösse sich mit $b+a$ dividiren lassen, und von a keine andere Potenz als die vom ungeraden Exponenten ε enthalten, so muß sie $P + a^\varepsilon$ seyn; denn ihr zweytes Glied darf nicht verneint seyn, wenn die Division aufgehen soll, und man findet wie vorhin $P = b^\varepsilon$; u. s. w.

248. Anm. Dieses gibt allgemein die Gleichungen welche aus der Division der reinen durch die Wurzelgleichungen (239; 240) entspringen. Es sey b die unbekannte Grösse, wie z (237) und a die gegebene, so ist für eine gerade reine Gleichung der Quotient (246) die Gleichung, welche die unmöglichen Wurzeln enthält, die der gegebenen geraden Gleichung genug thun. Z. E. wenn $\varepsilon = 6$ so ist $\frac{b^6 - a^6}{b^2 - a^2} = b^4$

$b^4 + a^2 b^2 + a^4$; und die Wurzeln der Gleichung $b^4 + a^2 b^2 + a^4 = o$ thun auch der $b^6 - a^6 = o$ genug. Ist ε ungerade, und $b^\varepsilon \pm a^\varepsilon = o$ so sind die Quotienten 243; 245; die Gleichungen, welche die unmöglichen Wurzeln enthalten, jener wenn das obere, dieser, wenn das untere Zeichen in der gegebenen reinen Gleichung vorhanden ist.

249. Anm. Auser diesem Gebrauche haben die gefundenen Sätze auch noch sonst vielfältigen Nutzen, z. E. Zahlen zu finden, die sich mit andern dividiren lassen. Es sey $b = 10$; $a = 2$; $\varepsilon = 6$; so ist vermöge 247; $\frac{1000000 - 64}{100 - 4}$ eine ganze Zahl $=$ $10000 + 400 + 16$

250. Lehnsatz. Das Product P aus einer möglichen Grösse b in eine unmögliche $\sqrt[2n]{-e}$ von der keine niedrigere Potenz, als die $2n$; möglich ist; ist möglich.

Bew. Wenn $b.\sqrt[2n]{-e} = P$ so ist $b^{2n}.-e = P^{2n}$; Aber b allemahl bejaht (31) Daher P verneint (Ar. 108) und P unmöglich (33)

251. Lehns. Aufgabe. Eine unmögliche Grösse wie 250. so auszudrücken, daß nur -1 unter den Wurzelzeichen bleibt.

Aufl. Sie ist $\sqrt[2n]{e}.\sqrt[2n]{-1}$ (24) wo der erste Factor in dem e bejaht ist, zweene entgegengesetzte mögliche Werthe hat. (237)

252. Lehns. $\sqrt[\alpha\delta]{f} = f^{1:\alpha\delta}$ (Ar. II. 9.) $=$
$f^{1:\delta\ 1:\alpha}$
f (Ar. II. 8.) $= \sqrt{\sqrt{f}}$ (Ar. II. 9.)
oder, wenn sich der Exponent eines Wurzelzeichens in zweene Factoren zerfällen läßt, so kann man jeden der Factoren für den Exponenten, eines Wurzelzeichens annehmen, und aus der gegebenen Grösse f; erstlich die Wurzel des einen Exponenten, denn aus dieser Wurzel die Wurzel des andern ausziehen. wen $\alpha = 2$; $\delta = 3$; so ist $\sqrt[6]{1000000} =$
$\sqrt{\sqrt[3]{1000000}} = 100 = 10$

253. Zus. Es ist gleichgültig, welche Wurzel man zuerst ausziehen will; wie in dem Exempel auch
$\sqrt[3]{\sqrt{1000000}} = 10$

254. Zus. Wenn $f = -1$; α eine gerade Zahl, δ eine ungerade; so ist $\sqrt[\delta]{-1} = -1$ (32; 237;) also
$\sqrt[\alpha\delta]{-} = \sqrt[\alpha]{-1}$

255. Zus. Soll sich dieser letztgefundene Ausdruck nicht weiter auf eben die Art verändern lassen, so muß man α nicht in ein Product aus einer geraden Zahl in eine ungerade zerfällen können; Es muß kein numerus pariter impar seyn; folglich muß es sich blos mit 2 dividiren lassen, d. i. eine Potenz der 2 seyn.

256.

256. Zus. Hieraus erhellt, wie man für eine unmögliche Grösse, die eine Wurzel eines geraden Grades aus - 1 ist, ihren einfachsten Ausdruck findet. Man zerfälle den Exponenten der Wurzel in ein Product, aus der höchsten Potenz der 2 die darinnen zu finden ist, in eine ungerade Zahl, und ziehe aus - 1 nur die Wurzel aus, deren Exponent die Potenz der 2 ist.

So ist $\sqrt[40]{-1} = \sqrt[8]{-1}$ wo $\alpha = 2^3$; $\delta = 5$;

$\sqrt[\delta]{\alpha}$

257. Anm. $\sqrt{\sqrt{-1}}$ wäre eine ungerade Wurzel aus einer unmöglichen Zahl, also auch unmöglich; daß also auch 253. hier statt findet, ob dieses Verfahren gleich zu der Absicht 256. nicht dienet.

258. Zus. Jede solche unmögliche Grösse läßt sich durch $b\sqrt[\alpha]{-1}$ ausdrücken; (255) wo ihre Potenz α; möglich und $= -b^{\alpha}$; jede niedrigere aber, unmöglich ist.

259. Zus. Der unmöglichen Grösse Potenzen 2α; 3α; 4α; ... $n\alpha$, sind möglich, und bejahte oder verneinte Grossen, nachdem n gerade oder ungerade ist. (31)

260. Zus. Wenn $m \not\equiv \alpha$; so ist jede Potenz der unmöglichen Grösse, die kein Vielfaches α zum Exponenten hat, oder $(\sqrt{-1})^{m} = (\sqrt{-1})^{\alpha}$ unmöglich. (250)

261. Lehnsatz. Weil $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$ (36) so ist $+1 = -\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ also $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$ welches in Rechnungen häufig gebraucht wird.

262. Lehnsatz. Wenn man soviel unmögliche nach 258. ausgedruckte Grössen als man will mit einander multiplicirt, nur daß deren keine mit der andern einerley ist, so ist das Product allemahl unmöglich.

Bew. Es erhellt, daß man hier nur das Product der Wurzeln aus -1 betrachten darf, weil die möglichen Grössen vor den Wurzelzeichen in die Wahrheit dieses Satzes keinen Einfluß haben. Der kleinste Exponent einer solchen Wurzel sey α; Weil nun alle Exponenten Potenzen der 2 sind, so kann man die grössern so ausdrücken, $\alpha\beta$; $\alpha\beta\gamma$; $\alpha\beta\gamma\delta$ u. s. w. wo jeder Buchstabe eine Potenz der 2 bedeutet. Nun sey

α	$\alpha\beta$	$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta\gamma\delta$	
Θ) $\sqrt{-1}.$	$\sqrt{-1}.$	$\sqrt{-1}.$	$\sqrt{-1}$	$= P$

so ist auf beyden Seiten die Potenz α gemacht; (20. und Ar. II. 8; 9;)

β	$\beta\gamma$	$\beta\gamma\delta$	α'	
$\Upsilon -- 1.\sqrt{-1}.$	$\sqrt{-1}.$		$\sqrt{-1}$	$= P$;

und die Potenz β gemacht, da $(-1)^{\beta} = +1$ (31)

γ	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$		
$\upsilon + 1.-1.$	$\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$		$\cdot 1$	$= P$

und die Potenz γ ge-

gemacht; da $(-1)^{\gamma} = +1$;

II $+1.+1.-1.\sqrt{-1}^{\delta} = P^{\alpha\beta\gamma}$ und die Potenz

δ gemacht, da $(-1)^{\delta} = +1$;

$\mathfrak{C} + 1.+1.+1.-1^{\alpha\beta\gamma\delta} = P$

Wenn die erste, für P gegebene Gleichung; ⊙; n unmögliche Factoren auf der linken Seite des Gleichheitszeichen stehen hat, so haben sich die ersten n - 1 in der letzten Gleichung $\mathfrak{C}$; in lauter + 1 verwandelt. Der erste nähmlich, wird durch die Erhebung auf die Potenz α in der Gleichung γ zu -1; und jeder der andern Factoren bekömmt im Wurzelzeichen einen Exponenten, der sein voriger

mit α dividirt ist, weil z. E. $\left((-1)^{\frac{1}{\alpha\beta}}\right)^{\alpha} = (-1)^{\frac{\alpha}{\alpha\beta}} = (-1)^{\frac{1}{\beta}}$ Nun wird durch die Erhöhung auf die Potenz β; in der Gleichung δ der erste Factor + 1 weil dieser Potenz gerade ist, und der zweyte -1; ferner durch die Erhöhung auf die Potenz γ; in II der zweyte Factor + 1 und der dritte -1; und so werden durch n nach einander folgende Erhöhungen, die ersten n - 1 Factoren alle + 1; der letzte aber — 1; Also ihr Product verneint.

neint. Dieses Product aber ist eine Potenz von P deren Exponent gerade ist; folglich ist P eine Grösse, von der eine gerade Potenz verneint ist; d. i. eine unmögliche Grösse. (33)

265. Aufg. Eine mögliche Grösse zu finden, die sich durch den unmöglichen Factor

$$b \dotplus f \sqrt{-1}^{\alpha}$$

für den ich $b \dotplus f \pi$ schreiben will, dividiren läßt.

Auf. Wenn $\alpha = \varepsilon$, $f^{\alpha} \pi = a$; also $- f^{\varepsilon} = a$

so ist aus 244; $b \dotplus f$ eine solche Grösse; und der Quotient ist $b - f^{\alpha-1}\pi$. $b \dotplus (f^{\alpha-2}\pi)^2$. $b \ldots \dotplus (f^{\alpha-1}\pi)$

266. Zus. Eine mögliche Grösse kann als Theile keine Potenzen von $f\pi$ enthalten, die nicht vielfache von α zu Exponenten haben, (260) also ist $b \dotplus f^{\alpha}$ die einfachste mögliche Grösse, die den angenommenen unmöglichen Divisor hat. Es ist nähmlich klar, daß man diese Grösse mit andern möglichen multipliciren könnte, und die Producte eben den unmöglichen Divisor haben würden. Die einfachste aber kann keine andere als die gefundene seyn, weil sich 245 vermöge 247 umkehren läßt.

267. Zus. Die mögliche Grösse, welche sich durch $b \dotplus f\pi$ dividiren läßt, läßt sich auch durch $b - f\pi$

(243) und beyder Product $b^2 - (t\pi)^2$ (246) dividiren.

268. Zus. Diese einfachste mögliche Grösse, hat α unmögliche Factoren; denn wenn man sie $= o$ sezt, so ist b in ihr die Wurzel einer Gleichung von so viel Abmessungen, d. i. einer Gleichung die aus soviel Wurzelgleichungen entsteht; (221) also muß $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon}$ ein Product aus soviel Factoren seyn. Daß aber diese Factoren alle unmöglich sind erhellt daraus, weil $+ f^{\varepsilon}$ allemahl positiv ist, wenn man auch statt f was verneintes sezte, (31) folglich $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon} = o$ eine Gleichung ist, in der b lauter unmögliche Werthe hat, d. i. die aus lauter unmöglichen Wurzelgleichungen entstehen muß; Also muß $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon}$ ein Product seyn, das lauter unmögliche Factoren hat, von deren jedem der erste Theil b ist.

269. Zus. Diese unmögliche Factoren, den $b + f\pi$ ausgenommen, geben mit einander multiplicirt den Quotienten (245) und die unmöglichen Factoren, den genannten, und $b - f\pi$ ausgenommen, geben vermöge 267 multiplicirt den Quotienten 246.

270. Exempel. Wenn $\alpha = 4$; so ist $b^4 + f^4$ die einfachste Grösse, die sich mit $b + f^4\sqrt{-1}$ divi-

diren läßt; Sie läßt sich auch mit $b - f^4\sqrt{-1}$ dividiren; und folglich auch durch beyder Product das (nach Ar. II. 5.) $b^2 - f^2\sqrt{-1}$ ist. Der Quotient, der sie durch dieses Product dividirt gibt, ist (aus 246 oder aus Ar. II. 5.) $b^2 + f^2\sqrt{-1}$ der $= o$ gesetzt $b^2 = -f^2\sqrt{-1}$ oder $b = \pm f\sqrt{-}\sqrt{-1}$ gibt; Also sind seine beyden Factoren $b - f\sqrt{-}\sqrt{-1}$ und $b + f\sqrt{-}\sqrt{-1}$.

271. Anm. Hier erhellt zugleich, wie $b + f^4\sqrt{-1}$ viererley bedeuten kann. Es ist nähmlich wegen des doppelten Zeichens jeder Quadratwurzel (32) $= b \pm f\sqrt{}\sqrt{-1}$ d. i. entweder $= + f\sqrt{} \pm \sqrt{-1}$ oder $b - f\sqrt{} \pm \sqrt{-1}$ wo jede der beyden letzten Ausdrückungen zweene Werthe enthält.

272. Aus dem bisherigen erhellt folgendes:

I. Wenn jede unmögliche Grösse sich durch $c + f\sqrt{-1}$ ausdrucken läßt, das ist aus einem möglichen Theile (der auch $= o$ seyn kann,) und einem unmöglichen besteht, so daß im letztern nur eine Quadratwurzel, aus einer möglichen negativen Grösse, enthalten ist, so hat jede Gleichung, in der unmögliche Wurzeln sind, solche paarweise (235) also in gerader Anzahl; oder, wenn eine Gleichung unmögliche Wurzeln hat, so sind derselben 2; oder 4; oder 6; u. s. w. nähmlich allemahl zugleich $c \pm f\sqrt{-1}$.

II. Wenn also die Gleichung als ein Product kann angesehen werden, das unmögliche, einfache Facto-

Factoren, von folgender Gestalt $x - c - f\sqrt{-1}$ enthält, so hat sie mit jedem solchen Factor auch den $x - c + f\sqrt{-1}$ und kann also in quadratische mögliche Factoren zerlegt werden. (236)

III. Gäbe es aber unmögliche Grössen die sich nicht auf die Form (I) bringen lassen, so würden von ihnen diese Schlüsse nicht gelten, und man müßte (II) wenn es wahr ist auf andere Art erweisen.

IIII. Aus den bisherigen Sätzen, läßt sich dieses nicht beurtheilen. Man kann aber als eine Nachricht hier mercken, daß jede unmögliche Grösse sich auf die angegebne Form bringen läßt, und daher (II) allgemein wahr ist. Hr. Euler hat dieses dargethan Recherches sur les racines imaginaires des equations Mem. de l'Ar. de Pr. 1749; p. 222. Seine Beweise gehören aber in die Analysis des Unendlichen, in meiner Einleitung dazu sind die Gründe derselben ebenfalls zu finden, die Ausführung aber ist für ein Handbuch zu weitläuftig.

V. Daß in jeder Gleichung die unmöglichen Wurzeln allemahl in gerader Anzahl sind, hat Hr. Euler a. a. O. 232 S. ebenfalls gewiesen. Es folgt sehr leicht aus Analys. des Unendl. 163; I.

Von den Veränderungen, die sich mit der Gleichungen Wurzeln machen lassen.

273. Aufg. Aus einer Gleichung M deren Wurzel x ist, eine N zu machen, deren Wurzel $y = x + c$ ist.

Aufl. Man setze y - c statt x.

Ex. M) sey B 224; wo die neue Wurzel von N; x + 10 seyn soll. So ist c = 10; x = y - 10; und

$$\begin{array}{rcrcrcr} x^3 & = & y^3 & - & 30y^2 & + & 300y - 1000 \\ -5x^2 & = & & - & 5 & + & 100 - 500 \\ -113x & = & & & & - & 113 + 1130 \\ +693 & = & & & & & + 693 \\ \hline o & = & y^3 & - & 35y^2 & + & 287y + 323; \quad (N \end{array}$$

Der Gleichung M Wurzeln sind hier - 11; + 7; + 9; der Gleichung N aber; - 1; + 17; + 19; jede der vorigen nähmlich um 10 vermehrt.

274. Zus. Wenn + c eine bejahte Grösse ist, so werden die bejahten Wurzeln grössere; die verneinten kleinere verneinte Grössen; man setze aber, eine kleinere verneinte Grösse sey grösser als die grössere verneinte. Also werden hiedurch die Wurzeln vermehrt.

275 Zus. Ist + c eine verneinte Grösse, so werden die bejahten Wurzeln kleinere, die verneinten grössere verneinte, d. i. beyde vermindert.

Ex. Für voriges M; sey c = - 8 oder

x = y + 8

$$\begin{array}{rcrcrcr} x^3 & = & y^3 & + & 24y^2 & + & 192y + 512 \\ -5x^2 & = & & - & 5 & - & 80 - 320 \\ -113x & = & & & & - & 113 - 904 \\ +693 & = & & & & & + 693 \\ \hline o & = & y^3 & + & 19y^2 & - & y - 19 \quad (N \end{array}$$

wo die Wurzeln - 19; - 1; + 1; sind.

276.

276. Zus. Durch die Verminderung können aus bejahten Wurzeln in M; verneinte in N werden; wie in 175 aus der Wurzel + 7 in M, (273) in N die Wurzel $7 - 8 = -1$ wird. Eben so kann die Vermehrung bejahte Wurzeln aus verneinten machen.

277. Zus. Weiß man eine bejahte Zahl, die grösser ist als die größte bejahte Wurzel in M; so wird die Wurzel von M um selbige vermindert, eine Gleichung geben, die lauter verneinte Wurzeln hat; und weiß man eine Zahl, die ohne Absicht auf ihr Zeichen betrachtet, eine grössere Zahl ist, als die größte verneinte Wurzel in M, auch ohne Absicht auf ihr Zeichen betrachtet, so gibt die Wurzel von M um diese Zahl vermehrt eine Gleichung, die lauter bejahte Wurzeln hat.

Exempel des leztern. In N 275; sind zwo verneinte Wurzeln, unter denen die größte verneinte -19 ist. Man nehme N 275 für M an; oder man sezze

M) $x^3 + 19x^2 - x - 19 = 0$.

Hier vermehre man die Wurzel um 20; oder man sezze $x = y - 20$ so kömmt

N) $y^3 - 41y^2 + 439y - 399 = 0$;

wo die Wurzeln $-19 + 20$; $-1 + 20$; $+1 + 20$ oder $+1$; $+19$; $+21$ sind.

276. Aufg. Aus der Gleichung M; (273) eine P zu machen, deren Wurzel $z =$ ex ist.

Aufl. Man darf nur $\frac{z}{e}$ statt x setzen, da man alsdenn die Gleichung nach 192. III; zu ordnen; alle Glieder mit der höchsten Potenz von e die sich in einem Divisor befindet, multipliciren muß. Diese höchste Potenz wird mit der höchsten Potenz von z oder von x einerley Exponenten haben.

Ex. Aus der Gleichung N 273. soll eine werden

wo $z = 10x$ also ist $x = \frac{z}{10}$ und

$$\frac{z^3}{1000} - \frac{5z^2}{100} - \frac{113z}{10} + 693^1 = 0 \text{ oder}$$

P) $z^3 - 10.5z^2 - 100.113z + 1000.693 = 0$

wo die Wurzeln $-110; +70; +90;$ sind.

279. Zus. Es sey M)

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + u = 0 \text{ so ist}$$

$$\frac{z^m}{m} + \frac{pz^{m-1}}{m-1} + \frac{qz^{m-2}}{m-2} \ldots + u = 0$$

oder P)

$$z^m + epz^{m-1} + e^2qz^{m-2} \ldots + eu = 0$$

daß man also die Regel so abfassen kann; Unter die Glieder der Gleichung M schreibe man nach der Ordnung die geometrische Reihe

m

1; e; e^2; . . . . e;

multiplicire jedes Glied der Gleichung durch das darunter stehende Glied der Reihe, und schreibe z statt x. Wenn in M Glieder fehlen, so muß man sich statt ihrer ○ vorstellen; (3) und damit das darunter befindliche Glied der Reihe multipliciren.

Ex. In nachstehender Gleichung soll die Wurzel mit 5 multiplicirt werden

M) $x^4 \quad * \quad * \quad - 10x - 100 = 0$

1; 5; 25; 125; 625

P) $z^4 \quad * \quad * \quad - 1250z - 62500 = 0$

wo $z = 5x$

280. Zus. Nachdem e grösser oder kleiner als 1 ist, wird z grösser oder kleiner als x; und die Wurzel der Gleichung M durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn e diese ganze Zahl ist, oder durch eine ganze Zahl dividirt, wenn e ein Bruch ist, dessen Nenner diese Zahl und der Zähler 1 ist. Z. E. mit 3 dividiren heißt mit $e = \frac{1}{3}$ multipliciren. Man darf also nur die Glieder der Gleichung, durch die darunter stehenden Glieder der Progreßon (279) dividiren.

281. Aufg. Aus einer Gleichung, in welcher Glieder fehlen, eine zu machen, die alle Potenzen

tenzen von der höchsten an nach der Ordnung enthält.

Aufl. Man setze statt x in der Gleichung y + e. Weil in jeder Potenz von y + e alle niedrigere Potenzen von y vorkommen, so erhält man auf diese Art eine Gleichung, wo eine Potenz von y an der Stelle zu finden ist, da eine von x fehlte. In der Gleichung l^p (221) fehle die Potenz m-n; so wird aus ihr

$$T \begin{matrix} m \\ +p \end{matrix} \quad \begin{matrix} m-1 \\ +mey \\ +(m-1)ep \\ +q \end{matrix} \quad \begin{matrix} m-2 \\ +\frac{m.(m-1)}{1.2}e^2y \end{matrix} \quad \begin{matrix} n \\ ..+\alpha e^{n-1}y \\ +\beta e^{n-1}p \\ +\gamma e^{n-1}q \end{matrix} \quad \begin{matrix} m-n \\ ... \\ \\ \\ +\delta e^{n-3}r \end{matrix}$$

wo α; β; γ; δ; . . . die Coefficienten bedeuten, die nach dem binomischen Lehrsatze in jeder der Potenzen m; m-1; m-2; m-3; . . . . von y + e; zu dem Gliede gehören, das die Potenz m - 1 von y hat. So erhellt, daß in T, die Potenz m - n von y zu finden seyn wird, wofern nicht ihr Coefficient = o ist. Wenn aber dieses geschehen soll, so hat man die Gleichung

e^n

$$e^n + \frac{\beta}{\alpha} \cdot pe^{n-1} + \frac{\gamma}{\alpha} \cdot qe^{n-2} + \frac{\delta}{\alpha} \cdot re^{n-3} \ldots$$

$= o$ wo alle Grössen bis auf e nähmlich p; q; r; ... als Coefficienten der gegebenen Gleichung P; und α; β; γ; δ; als Binomialcoefficienten gegeben sind. Diese Gleichung nun hat nicht mehr als n Wurzeln, (223) und wenn man also statt e etwas setzt, das keine von diesen Wurzeln ist, so wird der Coefficient nicht $= o$; und die Gleichung T hat das Glied, das in P fehlte.

Ex. P) $x^4 + px^3 + qx^2 + r = o$

T) $x^4 + 4e \left\{ \begin{matrix} + p \end{matrix} \right. \left| y^3 + 6e^2 \left\{ \begin{matrix} + 3ep \\ + q \end{matrix} \right. \right| y^2 + 4e^3 \left\{ \begin{matrix} + 3e^2 p \\ + 2eq \end{matrix} \right. \right| y + e^4 + e^3 p + e^2 q + r$

Sollte hier die erste Potenz in T wie in P fehlen, so wäre $4e^3 + 3e^2 p + 2eq = o$; wo ein Werth von $e = o$; (225) wenn man nähmlich zu x nichts addirte, da T mit P einerley bliebe; die andern beyden Werthe sind $e = -\frac{3}{8} p \pm \sqrt{(\frac{9}{64} p^2 - \frac{1}{2} q)}$ Weiß man diese Werthe, so kann man sie zu der Absicht der Gleichung T vermeiden, weiß man sie nicht, und setzt von ungefähr einen von ihnen statt e, so würde man selbst dadurch sehen, was man zu vermeiden hätte.

282. Aufg. Aus einer Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen.

Aufl. Aus der Gleichung P (221) soll man eine machen, in welcher das zweyte Glied fehlt. Man mache aus ihr T (281) soll nun in T das zweyte Glied fehlen, so ist $me + p = o$; $e = -\frac{1}{m} p$;

also muß man $y - \frac{1}{m} p$ statt x setzen.

283. Ex. Aus $x^3 + px^2 + qx + r = o$ das zweyte Glied wegzuschaffen, setze man $y - \frac{1}{3} p$ statt x; dieses gibt

$$y^3 - py^2 + \tfrac{1}{3} p^2 y - \tfrac{1}{27} p^3 = o$$
$$+ p \quad - \tfrac{2}{3} p^2 \quad + \tfrac{1}{9} p^3$$
$$+ q \quad - \tfrac{1}{3} pq$$
$$+ r$$

oder

$$T) \; y^3 * - \tfrac{1}{3} p^2 y + \tfrac{2}{27} p^3 = o$$
$$+ q \quad - \tfrac{1}{3} pq$$
$$+ r$$

284. Wenn P) $x^3 - 18x^2 + 87x - 110 = o$ so ist aus (283), $p = -18$; $q = +87$; $r = -110$ also $T) \; y^3 * - 21y - 20 = o$

285. Zus. Es ist klar, daß durch diese Veränderung der Wurzeln (282) wenigstens eine verneint werden muß, damit aller Summe $= o$ seyn kann. (225)

Die Wurzeln von P 284; sind 2; 5; 11; und die von T; $2 - 6$; $5 - 6$; $11 - 6$; oder -4; -1; $+5$.

286. Zus. Wenn das zweyte Glied in P wäre, aber andere fehlten, so würde dieses Verfahren solche ersetzen (281) daß sich also auf diese Art nicht mehr als ein Glied wegschaffen läßt.

287. Aufg. Aus P (221) das dritte Glied wegzuschaffen.

Aufl. Man mache T 281; und setze des dritten Gliedes darinnen Coefficienten = o; so bekömmt man $e = \frac{1}{m} P \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} p^2 - \frac{2q}{m.(m-1)}\right)}$ wo man einen dieser beyden Werthe in $x = y + e$ setzen kann, wenn beyde etwa unmöglich werden, so läßt sich die Auflösung nicht bewerkstelligen.

288. Anm. Das zweyte Glied einer Gleichung schafft man gern weg, weil die Rechnung mit den Wurzeln der Gleichung dadurch verkürzt wird. Z. E. Man kann leichter prüfen, was für Zahlen Wurzeln von T 284. als was für welche dergleichen von P sind. Diese Erleichterung ist bey dem dritten Gliede nicht so beträchtlich, als bey dem zweyten, weil die Potenz der unbekannten Grösse im zweyten höher ist, daher hat diese Aufgabe wenig Nutzen.

289. Anm. Wollte man das vierte, fünfte u. s. w. Glied wegschaffen, so müßte man e aus Gleichungen von höhern Grade als den zweyten finden, welches jetzo nicht in unserer Gewalt, und wegen 288; auch hier von keinem Nutzen ist.

290. Anm. So läßt sich, wenn 289 vorausgesetzt wird, jedes Glied der Gleichung wegschaffen, aber nur eins allein. Man kann auch leicht zeigen, daß keine Methode möglich ist, die allgemein aus jeder Gleichung alle Glieder bis auf das höchste und das

letzte wegschaffte, wie der Herr von Tschirnhausen dergleichen erfunden zu haben glaubte. Gäbe es eine solche Methode, z. E. jede cubische Gleichung (283) in $y^3 + t = 0$ zu verwandeln, so daß x sich finden liesse, wenn man y hätte; so müßte das x der allgemeinen cubischen durch das y der reinen bestimmt werden. Aber das y der reinen hat allemahl zweene unmögliche Werthe (240) und das x der allgemeinen kann lauter mögliche haben, woraus schon zu übersehen ist, daß sich dergleichen Methode nicht erfinden läßt.

291. Aufg. Aus einer Gleichung

$$x^m + qx^{m-2} + rx^{m-3} \ldots + tx + u = 0$$

wo das zweyte Glied fehlt, eine zu machen, wo das letzte Glied ohne eines fehlet.

Aufl. Man setze $x = \frac{u}{y}$ so kömmt

$$\frac{u^m}{y^m} + \frac{qu^{m-2}}{y^{m-2}} + \frac{ru^{m-3}}{y^{m-3}} \ldots + \frac{tu}{y} + u = 0$$

mit y^m multiplicirt, und mit u dividirt;

$$0 = u^{m-1} + qu^{m-3}y^2 \ldots + ty^{m-1} + y^m$$

in welcher Gleichung, wenn man sie von der rechten Hand gegen die linke liest, das letzte Glied ohne eines fehlt.

292. Aufg. Bey einer Gleichung die Brüche aus den Coefficienten wegzuschaffen.

Aufl.

Aufl. Man multiplicire die Wurzel der Gleichung nach (280) durch eine Zahl, die sich durch jeden Nenner der vorhandenen Brüche einzeln dividiren läßt. Denn weil jeder Coefficient durch eine Potenz dieser Zahl multiplicirt wird, (280) so kommen auf diese Art Producte ohne Brüche, welche die Coefficienten der neuen Gleichung sind.

Ex. Bey nachstehender Gleichung G) sind der Brüche Nenner; 3; 3. 11; 2. 11; Also wird sich 3. 2. 11. mit jedem dividiren lassen; dieses ist 66; man mache also eine Gleichung H wo $y = 66.x$ ist.

G) $x^3 + \frac{20}{3} x^2 + \frac{100}{33} x + \frac{17}{22} = 0$

$1; 3.2.11; \underline{(3.2.11)^2}; \underline{(3.2.11)^3}$

H) $y^3 + 2.11.20y^2 + 3.11.4.100y + 27.4.121.17 = 0$

Das Product aus allen Nennern läßt sich ohne Zweifel durch jeden einzeln dividiren, und kann also auch statt dieser Zahl gebraucht werden, ob es wohl in dem Falle, da die Nenner gemeinschaftliche Divisoren haben, oder nicht numeri inter se primi sind, nicht die kleinste Zahl ist, die solches bewerkstelliget. In dem Exempel liesse sich auf diese Art $3\ 33.22 = 2178$ statt 66 gebrauchen, welches aber ohne Zweifel viel unbequemer wäre, und eine Gleichung mit viel grössern Coefficienten gäbe.

293. Zus. So lassen sich zuweilen auch Irrationalgrössen aus den Coefficienten wegschaffen. In der nächstfolgenden Gleichung multiplicirt man die Wurzel mit $\sqrt{2}$.

$$x^4 + 7\sqrt{2}.x^3 * - 10\sqrt{8}.x + 5 = 0$$
$$1; \quad \sqrt{2}; \quad 2; \quad \sqrt{8}; \quad 4;$$

$$y^4 + 7.2y^3 * - 10.8.y + 20 = 0$$

In der nächstfolgenden dividirt man (280) durch $\sqrt{3}$

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} * - 6\sqrt{3} = 0$$
$$1; \quad \sqrt{3}; 3; \quad 3\sqrt{3}$$

$$y^3 - 3y^2 * - 2 = 0$$

Es erhellt, daß solches allemahl gewisse Umstände bey den Coefficienten voraussetzt, ohne welche dieses Verfahren keinen Nutzen hat. Nähmlich alle Irrationalgrössen in den Coefficienten müssen Potenzen einer einzigen seyn, und gerade an den Stellen stehen, wo die Potenzen der, mit welcher man multiplicirt oder dividirt, in ihrer geometrischen Reihe darunter zu stehen kommen.

294. Aufg. Zu finden, ob eine Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln hat, und diese ganze Zahlen selbst zu entdecken.

Auflt. Weil das letzte Glied ein Product aus allen den Wurzeln entgegengesetzten Grössen ist, so zerfälle man es in seine Factoren: Jeder Factor kann mit den Zeichen + oder — 1 genommen werden, und man muß prüfen, ob er mit einem beyder Zeichen eine Wurzel ist. Hat man diese Proben mit allen Factoren angestellt, und keine Wurzel gefunden, so gibt es keine ganze Zahl, die eine Wurzel der Gleichung wäre.

295. Ex. In nachstehender Gleichung H; ist das letzte Glied = 24. 10 = 3. 8. 2. 5; Es hat also eine grosse Menge Factoren, die man findet, wenn man alle einfachen 1. 3. 2. 2. 2. 2. 5 in die es zerfällt, auf alle mögliche Arten verbindet; z. E. 3. 2 = 6; 3. 4 = 12; 3. 8 = 24; 3. 16 = 48; 2. 5 = 10; 4. 5 = 20; u. s. w. Eigentlich muß man alle diese Factoren versuchen. Es ist aber rahtsam die kleinsten zuerst vorzunehmen, und das zweyte Glied, wenn es nicht schon fehlt, wegzuschaffen. (288) Man setze also nach und nach statt x die verschiedenen Factoren, darunter auch 1 gehört, so sind diejenigen Wurzeln, die = o geben.

x	x^3	— 124x	— 240 (H
1	1	— 124	— 240
+ 2	8	— 248	— 240
— 2	— 8	+ 248	— 240 = o
+ 3	27	— 372	— 240
— 3	-27	+ 372	— 240 = 105
+ 10	† 1000	— 1240	— 240
— 10	- 1000	+ 1240	— 240 = o
+ 12	† 1728	— 1488	— 240 = o

Also sind die drey Wurzeln — 2; — 10; + 12;

296. Zus. Wenn man eine Wurzel hat, und die Gleichung H durch die ihr zugehörige Wurzelgleichung dividirt, so bekömmt man (226) eine Gleichung, bey der sich das Verfahren leichter wiederhohlen läßt, in so fern man keine solche hohe

Potenzen, der Zahl, die man versucht, zu machen nöthig hat, und so findet man die übrige Wurzeln mit geringerer Mühe.

Hätte man in (226) 2 als die Wurzel der dortigen biquadratischen Gleichung gefunden, so gäbe die daselbst angewiesene Division die cubische, deren drey Wurzeln zu entdecken weniger Rechnung erfodert als die übrigen drey Wurzeln der biquadratischen; aber jene drey und diese drey sind einerley. Hätte man auch von der cubischen nur eine Wurzel, z. E. 7 gefunden, (Siehe B 224;) so gäbe die Division mit x-7; die quadratische Gleichung A; deren Wurzeln man aus 78 finden könnte.

297. Anm. Wer nähmlich von einer cubischen Gleichung eine Wurzel weiß, der weiß sie alle, sollten sie auch gleich irrational seyn, weil er durch die Division eine quadratische Gleichung erhalten und solche auflösen kann.

298. Anm. Das Verfahren (294) ist mühsam, wenn das letzte Glied sehr viel Factoren hat, und kann doch vergeblich seyn. Man hat Arten es abzukürzen.

299. Aufg. Aus einer Gleichung K; eine L zu machen, so daß man die Wurzeln von K weiß, wenn die von L bekannt sind; und daß das letzte Glied von L weniger Factoren hat als das von K.

Aufl. Man setze eine willkührliche Zahl a; statt x in K; und sehe, was alle Glieder von H nach dieser Voraussetzung zusammengerechnet, geben. Wenn die-

dieſes eine Zahl iſt, die weniger Factoren hat als das letzte Glied von K, ſo ſetze man $x = y + a$ und mache auf dieſe Art L, wo man, weil das letzte Glied weniger Factoren hat, die ganzen Werthe von y leichter entdeckt als die ganzen Werthe x in K; und aus jenen dieſe finden kann.

K) $x^3 + px^2 + qx + r$

$a^3 + pa^2 + qa + r = D$

L) $y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 = 0$

$+ p \quad + 2pa \quad + pa^2$

$+ q \quad + qa$

$+ r$

Es erhellt nähmlich, daß D allemahl der Gleichung L letztes Glied ſeyn wird, daß für K eine cubiſche genommen worden, dient nur als ein Exempel.

300. Ex. Weil $105 = 1.3.5.7$ herauskömmt, wenn man -3 ſtatt x in H; 295; ſetzt, ſo ſey $a = -3$; alſo $x = y - 3$ und weil H 295 mit K 299 einerley geſetzt; $p = 0$; $q = -124$; $r = -240$; ſo bekömmt man L) $y^3 - 9y^2 - 97y + 105 = 0$ wo man nur die Factoren 1; 3; 5; 7; und die, welche aus ihnen entſtehen können, verſuchen darf. Man verſuche 1; ſo iſt $1 - 9 - 97 + 105 = 0$ alſo eine Wurzel $y = 1$ und folglich eine Wurzel $x = 1 - 3 = -2$ und ſo findet man die übrigen Wurzeln der Gleichung H; aus den übrigen der Gleichung L.

301. **Erkl.** Gränzen einer Wurzel heissen die Zahlen, zwischen welche sie fällt; Gränzen der Wurzeln überhaupt, die Zahlen, zwischen denen alle mögliche Wurzeln der Gleichung fallen. Eine positive Zahl, die grösser oder kleiner ist als die größte oder kleinste positive Wurzel, heißt die größte oder kleinste Gränze der bejahten Wurzeln, und eine verneinte Zahl, die grösser oder kleiner ist als die größte oder kleinste verneinte Wurzel, heißt die größte oder kleinste Gränze der verneinten. Nimmt man kleiner in dem Verstande (274) so ist die größte verneinte Zahl, die kleinste Gränze.

Für H 295 ist + 13 die größte positive Gränze; — 11 die größte negative; oder die kleinste, nachdem man das Wort nimmt.

302. Aufg. Die positiven Gränzen für $x^3 - ax + b = 0$ zu finden, wo die Buchstaben für lauter bejahte Grössen angenommen, und erst durch das ihnen vorgesetzte Zeichen verneint werden.

Auflösung. Weil $ax = x^3 + b$; so ist $x^3 > ax$ also $x > \sqrt{a}$; Weil $b - ax = -x^3$ so ist $ax < b$ also $x < \frac{b}{a}$

Ex. Für $x^3 - 7x + 6 = 0$ ist $a = 7$; $b = 6$ also $x > \sqrt{7}$ oder $> 2,6$ und $< \frac{6}{7}$; Um also zu finden, ob die Wurzel ganze positive Werthe hat, darf man von den Factoren des letzten Gliedes keine ver-

versuchen, die nicht zwischen $\frac{6}{7}$ und 2, 6 fallen, d. i. keine als + 1; + 2; also hat man 3 und 6 nicht nöthig zu versuchen. Die Wurzeln sind — 3; + 1; + 2;

Wenn $x^3 - 17x + 360 = 0$ also $a = 17$; $b = 360$ wäre $x < \sqrt{17}$ und $> \frac{360}{17}$ oder > 21 welches sich widerspricht. Nähmlich die Wurzel ist negativ wieder die Voraussetzung.

303. Anm. Auf ähnliche Art verfährt man in andern Fällen. Jede Gleichung mit bestimmten Zeichen der Coefficienten erfordert eine eigene Arbeit; Mann ist auch nicht im Stande zu sagen, ob nicht vielleicht die Wurzeln in viel engere Gränzen eingeschlossen wären, als dieses Verfahren angibt: daher ist es nicht nöthig sich hier weiter damit aufzuhalten.

Wie man die irrationalen Wurzeln der Gleichungen durch Näherung findet.

304. Lehrs. Wenn

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = y$$

so gibt jeder bestimmte Werth von x einen einzigen bestimmten Werth von y. Diese Gleichung wird nähmlich zu einer einfachen (58) bestimmten (179) wenn statt x ein bestimmter Werth gesetzt wird, da die Coefficienten schon bestimmt sind. Wenn man also nach und nach statt x alle mögliche bejahte

jahte und verneinte Grössen setzt, so bekömmt man eine Reihe von Werthen von y; deren allgemeines Glied y (9) hier als eine veränderliche Grösse angesehen wird, wie wenn man auf der Linie dD 6 F. nach der Ordnung AB; AC; AD; u. s. w. für die Werthe von y nähme, daß also y allemahl den Weg eines Punctes P welcher auf der Linie fortginge, ausdrückte, den er von A aus zurücke gelegt hätte. Hat y eine Zeitlang zugenommen und nimmt nachgehends wieder ab; z. E. ist es AD gewesen, und wird wieder AC; so ist des Punctes P Weg AD - DC da der letzte Theil verneint ist. (Ar. I. 90.)

305. Zus. In dieser Reihe der Werthe von y kömmt das o; das auch als ein Werth angesehen wird, sovielmahl vor, soviel mögliche Wurzeln die Gleichung P (221) hat. Hat diese Gleichung unmögliche Wurzeln, so kommen solche nicht vor, wenn man nur alle mögliche Werthe von x nimmt, und also finden sich auch die ihnen zugehörigen o, in der Reihe der y nicht.

306. Zus. Glieder dieser Reihe von y kann man finden, wenn man statt x alle ganzen bejahten und verneinten Zahlen setzt. Diese machen die Reihe der y für ganze Zahlen aus. Zwischen jedes Paar Glieder dieser Reihe fallen noch unzählich viel y für gebrochene Zahlen, weil zwischen jedes Paar ganze um 1 unterschiedene Werthe von x,

un-

unzählich viel fallen, die von einem der beyden nur um eigentliche Brüche unterschieden sind.

307. Zus. Durch dieses Verfahren (306) findet man zuverläßig die ganzen Zahlen, welche Wurzeln der Gleichung P (221) sind. Hat aber diese Gleichung eigentliche oder uneigentliche Brüche zu Wurzeln, so finden sich die ihnen zugehörigen o in der Reihe (306) nicht.

308. Exempel.

I

y	x			
+ 384	— 3			
+ 231	— 2			
+ 240	— 1	C	B	
+ 315	0	+ 6	— 26	
+ 384	+ 1	+ 6	— 20	
+ 399	+ 2	.	— 14	
+ 336	+ 3	.	— 8	
+ 195	+ 4	.	— 2	
0	+ 5	.	+ 4	
— 201	6			
— 336	7			
— 309	8			
0	9			
+ 735	10			
+ 2064	11			
+ 4179	12			
+ 7269	13			
+ 11655	14			
+ 17520	15			

II

		y	x
	A	— 53	— 4
+ 53		0	— 3
+ 27		+ 27	— 2
+ 7		+ 34	— 1
— 7		+ 27	0
— 15		+ 12	+ 1
— 17		— 5	+ 2
— 13		— 18	+ 3
+ 10		— 21	+ 4
+ 16		— 8	+ 5
+ 22		+ 27	+ 6
+ 10	— 3		
+ 16	+ 13		
+ 22	+ 35		

Das

Das I. Ex. ist für $x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 82x + 315 = y$; wo für $x = +5$; und $= +9$; $y = 0$ wird, also hat P hier die beyden Wurzeln $+5$; $+9$; und will $\frac{P}{(x-5).(x-9)} = x^2 + 4x + 7$ (226; 227) so sind die beyden andern Wurzeln $-2 \pm \sqrt{-3}$ (78) und y kann hier nicht mehr als zweymahl $= 0$ werden. (305)

Das II. Ex. ist für $x^3 - 4x^2 - 12x + 27 = y$ wo eine Wurzel -3 ist, und $\frac{P}{x+3} = x^2 - 7x + 9$; die Wurzeln $\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$ oder 5, 302. .; 1, 697 hat, die zwischen 5 und 6; und 2 fallen, so daß für ganze Werthe von x; y nur einmahl $= 0$ werden kann.

309. Unter A; B; C; stehen die ersten, zweyten, dritten Unterschiede der Reihe y; die dritten sind 6, wie (48)

310. Aufg. Die Reihen der Unterschiede (50) von der Potenz m zu finden.

Aufl. Um die Sache allgemein und nicht nur für ganze Zahlen zu untersuchen, wachse x um den unveränderlichen Unterschied e; so daß aus x; $x + e$ werde. So ist $(x+e)^m - x^m = mex^{m-1} +$

$\frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 x^{m-2}$ . . welche Grösse ich A1 nennen will. Sie ist ein allgemeines Glied der Reihe der ersten Unterschiede, oder kürzer zu reden: des ersten Unterschiedes und hat m Theile. Setzt man in ihr x + e statt x, so bekömmt man dieser Reihe nächfolgendes Glied, das A2 heissen mag. Dasselbe besteht aus m Reihen, jedes Glied in A1 gibt hier eine Reihe. Ich heisse höchste Glieder, wo x auf die höchsten Potenzen erhoben ist. Das höchste Glied in jeder der m Reihen von A2 ist einerley mit dem Gliede von A1 aus dem diese Reihe enstanden ist. Das zweyte Glied in jeder Reihe ist einen Grad niedriger als das höchste; und weil jedes Glied in A, einen Grad höher ist als sein nächstfolgendes, so ist in A2; das zweyte Glied jeder Reihe einen Grad höher als das zweyte der nächstfolgenden, derjenigen nähmlich, die aus dem nächstfolgenden Gliede von A1 enstanden ist. Die zweyten Glieder der Reihen werden also nach der Ordnung immer um einen Grad niedriger. Nun ist in jeder Reihe das zweyte Glied höher als alle nachfolgenden in eben der Reihe; also ist das zweyte Glied der ersten Reihe als das höchste unter allen zweyten Gliedern, auch das höchste unter allen in A2 befindlichen Gliedern aller Reihen, die ersten Glieder der Reihen ausgenommen. Nun nehme man A2 - A1 als B1; das allgemeine Glied des zweyten Unterschiedes. Durch diesen Abzug heben sich

sich die ersten Glieder der Reihen in A2 auf, und bleiben blos ihre zweyten und folgenden Glieder übrig. Unter diesen ist das höchste, das zweyte Glied der ersten Reihe von A2; und also ist dieses das höchste Glied von B1;

$$A1 = mex + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 x^{m-2} \ldots\ldots$$

$$A2 = me.(x + (m-1)ex^{m-1} \ldots) + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2.(x + (m-2)ex^{m-2} \ldots)$$

$$B1 = m.(m-1)e^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2} e^3 x^{m-3}$$

Es sind also die höchsten Glieder

des ersten Unterschiedes mex^{m-1}

des zweyten Unterschiedes $m.(m-1)e^2 x^{m-2}$

Setzt man nun $x + e$ statt x in B1; um daraus B2; das folgende Glied des zweyten Unterschiedes zu machen, so gibt wieder jedes Glied von B1, eine Reihe in B2; und es wird B2-B-1 = C1 der dritte Unterschied. Sein höchstes Glied muß das zweyte Glied der Reihe B2 seyn, die aus dem höchsten Gliede von B1 entsteht. Denn die ersten Glieder der Reihen heben sich durch den Ab-

zug

zug auf, und das zweyte Glied der ersten Reihe, ist wie vorhin höher als jedes zweyte Glied irgend einer andern seyn. Daher findet sich das höchste Glied des dritten Unterschiedes m. (m - 1) e^2

$$\left((x+e)^{m-2} - x^{m-2} \right) \text{ oder } m.(m-1).(m-2)$$

$$e^3 x^{m-3}$$

der nte Unterschied D 1 heisse $\alpha x^{m-n} + \beta x^{m-n-1} \ldots$ daß sein höchstes Glied die Poten; m - n habe, nehme ich an und es ist wenigstens für n=1; =2; =3; richtig, ich will gleich zeigen, daß es daraus auch für alle andere Werthe von n folge.

Also ist $D2 = \alpha.(x+e)^{m-n} + \beta.(x+e)^{m-n-1} \ldots$ und der (n+1)te Unterschied

$$E1 = D2 - D1 = \alpha.(m-n)\,ex^{m-n-1} \ldots$$

$$+ \beta.(m-n-1)\,ex^{m-n-2} \ldots$$

Hier erhellt wie vorhin, daß der ersten Reihe in D2; zweytes Glied, das höchste unter allen in E1 ist. Es ist aber $= \alpha.x^{m-n}.\frac{(m-n)\,e}{x}$ oder es ist des nten Unterschiedes höchstes Glied mit $\frac{(m-n).\,e}{x}$ multiplicirt. Man nehme also für des nten Unterschiedes höchstes Glied folgendes Gesetz an: Ein

Pro-

Product aus allen ganzen Zahlen, wie sie von m an bis mit auf m um die Zahl des Unterschiedes weniger eins vermindert folgen, sey in ein anderes Product multipliciret, dessen beyde Factoren sind: e auf die Potenz erhoben, welcher Exponent die Zahl des Unterschiedes ist, und x auf die Potenz erhoben, welcher Exponent m weniger der Zahl des Unterschiedes ist; d. i. man seze, des n ten Unterschiedes höchstes Glied sey $m.(m-1).(m-2)\ldots$

$$(m-n+1)\,e^{n}\,x^{m-n}$$

; so kömmt für das höchste Glied des $(n+1)$ ten Unterschiedes $m.(m-1)$

$$(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n).\,e^{n+1}\,x^{m-n-1}$$

welches unter eben dem Geseze stehet, unter dem das vorige höchste Glied stand. Ist also das angenommene Gesez des höchsten Gliedes für einen Werth von n, so ist es auch für den nächstgrössern, und so nach der Reihe für alle nächstgrössere wahr. Aber es ist für $n = 1; 2; 3;$ und also für jedes n wahr. Daher ist das höchste Glied des n ten Unterschiedes $m.(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\,e^{n}\,x^{m-n}$

folglich ist für den m ten Unterschied, wo $n = m$ das höchste Glied $m.(m-1).(m-2)\ldots.1.e^{m}$ und weil kein Glied in irgend einem Unterschiede; x auf Potenzen von verneinten Exponenten erhoben enthält, sondern jedes Unterschieds niedrigstes Glied ist, das das x° enthält, so ist das gefundene höchste Glied des m ten Unterschiedes zugleich sein niedrigstes

stes, oder es ist der m te Unterschied ganz. Da nun hier x nicht mehr zu finden ist, so kann man aus diesem allgemeinen Gliede des m ten Unterschiedes, kein nächstfolgendes machen, also auch keinen m + 1 ten Unterschied finden. Also hat x^m; m Unterschiede, davon der letzte beständig ist. Wenn man also von der Reihe x^m; m + 1 Glieder durch die unmitelbare Erhebung der Zahlen x; x + e; x + 2e; x + 3e; . . . . x + me; auf die Potenz m gefunden hat, so geben diese m + 1 Glieder; m erste Unterschiede, und diese ersten Unterschiede, m — 1 zweyte, und diese zweyten m - 2 dritte; und so kömmt man immer, die Unterschiede einer Reihe von einander abgezogen, und daraus die nächstfolgenden Unterschiede gefunden, auf zweene (m - 1) te Unterschiede, die einen m ten geben. Da man nun weiß, daß dieser unveränderlich ist, so addire man ihn zu dem untersten m - ten, so hat man einen neuen m - 1 ten, der zu dem untersten m - 2 ten addirt einen neuen m - 2 ten gibt, und so kömmt man durch addiren auf ein neues Glied der Reihe x^m, wie 48.

311. Zus. Setzt man statt x lauter ganze Zahlen, so ist e = 1 und der beständige Unterschied

m. (m - 1) 1. (50)

312. Zus. Setzt man in dem Werthe von y (304) x + e statt x; so bekömmt man ein zweytes y, das aus so viel Reihen besteht, so viel Theile wie x^m; px^{m-1}, u. s. w. das erste y hat. Die ersten Glie-

der dieser Reihen, sind mit den Theilen des ersten y einerley; und das zweyte Glied der ersten Reihe, die aus x^m entsteht, ist höher als jedes zweyte Glied irgend einer andern Reihe. Sucht man also aus diesen beyden y, den ersten Unterschied, von y; so ist desselben höchstes Glied einerley mit dem höchsten Gliede des ersten Unterschiedes von x^m. Aber aus dem höchsten Gliede des ersten Unterschiedes von y, folgen die höchsten Glieder der folgenden Unterschiede, nach eben dem vorhin gebrauchten Verfahren: Also sind diese höchsten Glieder mit den höchsten Gliedern der Unterschiede von x^m einerley, und für $e = 1$ ist der $m$te Unterschied von y wie z^{11}.

313. Anm. Das II. E. 308. erläutert dieses (309) und man findet also aus $m + 1$ Gliedern der Reihe y; alle folgenden durch die Addition wie (50). Z. E. der unterste zweyte Unterschied im Exempel ist 22; also sein nächstfolgender $22 + 6 = 28$; und der nächstfolgende erste $35 + 28 = 63$; und der nächstfolgende Werth von $y = 27 + 63 = 90$ der zu $x = 7$ gehört. Wollte man die Reihe hinaufwärts fortsezen, so wäre der nächste zweyte Unterschied über dem obersten $-26 - 6 = -32$ und der nächste erste Unterschied über dem obersten $53 - (-32) = 53 + 32 = +85$ und das nächste y über dem obersten $-53 - 85 = -138$ für $x = -5$.

314. Grundf. Wenn man für x lauter bestimmte Werthe, die sich angeben lassen, lauter endliche Werthe (Geom. 12. S. 12. Zuf.) sezt, so bekömmt man auch y lauter endliche Werthe.

315.

315. Erkl. Eine Grösse b fält zwischen zwo andere a und c; wenn die Unterschiede b — a; c — a; beyde einerley Zeichen haben, beyde bejaht, oder beyde verneint sind, und b-a in dem ersten Falle eine kleinere bejahte Grösse, in dem andern eine kleinere verneinte als c-a ist. Es wird nähmlich sowohl b als c aus a dadurch, daß im ersten Falle was bejahtes und im zweyten was verneintes zu a kömmt, und in jedem Falle kömmt weniger bejahtes oder verneintes zu a um b, als um c daraus zu machen. So fällt — 7 zwischen — 10 und + 1 weil — 7 — (— 10) oder + 3 eine kleinere bejahte Grösse als + 1 — (— 10) oder + 11; Und — 8 fällt zwischen — 3 und — 12 weil — 8 — (— 3) oder — 5 eine kleinere verneinte Grösse ist, als — 12 — (— 3) oder — 9. Und 8 fällt zwischen 12 und 7 weil 8 — 12 oder — 4 ein kleineres verneintes ist, als 7 — 12 oder — 5.

316. Lehrs. Wenn x = a ein positives v; und x = c ein verneintes gibt, so fällt wenigstens ein Werth x = b zwischen a und c der y = o macht.

Bew. Die bestimmten Werthe a und c, und alle dazwischen fallende geben bestimmte und endliche y. Die veränderliche Grösse y (304) kann aber nicht anders als durch o in das Entgegengesetzte übergehen, wenn sie nicht unendlich werden, wenn sie nicht alle Gränzen übersteigen darf. (S. 12. S. 14 Zus.) und dieses letztere darf sie hier

nicht thun, (314) weil alle Werthe von x die zwischen a und c fallen, endlich sind. (315) Geht also y zwischen den beyden erwähnten entgegengesetzten Werthen nur einmahl ins Entgegengesetzte, so wird es auch nur einmahl ○; Es kann aber solches mehrmahl verrichten. Sein I. Wehrt kann z. E. bejaht seyn; es kann II. verneint, III. wieder bejaht, IIII. wieder verneint werden. Da denn I. und IIII. entgegengesetzt sind, und zu a, c, gehören mögen. Hier geht y zwischen I. II; zwischen II. III, zwischen III. IIII. also dreymahl durch ○. Die Zahl der Durchgänge durch ○ muß ungerade seyn, weil nur der zweyte, vierte, u. s. w. jeder gerade Werth von diesen abwechselnden Werthen verneint seyn kann. Wenn y = AC für x = a; und = Ab für x = c 6 Fig. so kann der Punct P (304) nicht anders als durch A in b kommen, d. i. seine andere Weite von A, der Werth y; muß = ○ werden, ehe sie der ersten entgegengesetzet wird. Am angeführten Orte der Geometrie ist erinnert, daß der Punct, wenn er von A ohne Ende fort über B; C; D; und alle mögliche Gränzen hinausginge, alsdenn auf der andern Seite nach d; c. u. s. w. kommen könnte. Ich werde dieses an seinem Orte umständlicher erklären. Hier, da ich es nicht brauche, würde es eine nachtheilige Ausschweifung seyn. So geben im II. Exempel 308; die Werthe von x; —5; —4; jener ein bejahtes, dieser ein verneintes y; zwischen sie aber fällt der Werth — 3; der y = ○ gibt.

317.

317. Zus. Wenn in der Reihe der x (306) eine gewisse ganze Zahl ein bejahtes y und die nächste ganze Zahl ein verneintes gibt, so fällt eine Wurzel (305) zwischen diese beyden ganzen Zahlen. Und so erhellt, daß das Verfahren (305) auch wenn keine Wurzeln ganze Zahlen sind, dient die Gränzen jeder möglichen Wurzel (301) in ganzen Zahlen zu finden, wofern nicht zwischen zwo nächste ganze Zahlen zwo Wurzeln fallen. Denn wenn z. E. eine Wurzel 5, 3; die andere 5, 8 wäre, und $x = 5$, einen bejahten Werth von y gäbe, so gäbe $x = 5$, 4 einen verneinten, und $x = 6$ wieder einen bejahten, weil nähmlich eine Wurzel zwischen 5 und 5, 4; die andere zwischen 5, 4 und 6 läge. Also entdeckten sich diese beyden Wurzeln durch 306 nicht.

318. Anm. Unter dergleichen Umständen wird es schwer fallen diese Wurzeln zu entdecken; wenn man nicht schon weiß, zwischen welchen ganzen Zahlen sie enthalten sind; alsdenn nähmlich kann man eine dieser ganzen Zahlen um Brüche vermehren, und so die y suchen, welche den x zugehören, die zwischen diese beyden ganzen Zahlen fallen, da sich denn die Wurzeln nach 306 entdecken. Aber diese Arbeit läßt sich nicht zwischen jedem Paare nächster ganzer Zahlen vornehmen: Und wenn die Reihe (306) nirgends o hat, so kann man daraus nur eines von diesen dreyen schliessen: daß alle Wurzeln Brüche, oder daß manche Brüche, manche unmöglich, oder daß alle unmöglich sind (305) welches letzte bey einer Gleichung von einer ungeraden Abmessung, nur von allen bis auf eine gelten kann. (272)

319. Aufg. Wenn man die Gränzen einer Wurzel in ganzen Zahlen hat, (317) diese Wur-

Wurzel bis auf Zehntheilchen genau zu finden.

Aufl. Man sieht leicht, welcher von beyden Zahlen die Wurzel am nächsten liegen muß, derjenigen nähmlich, deren y am wenigsten von o unterschieden, das kleinste bejahte oder verneinte ist, weil sich der Werth von y nach und nach verändert. Diese ganze Zahl verändere man nach der Ordnung um o, 1; o, 2; o, 3 u. s. w. so daß man Brüche erhält, die zwischen sie und die andere der beyden ganzen Zahlen fallen. Man suche die y für diese Brüche, so entdecken sich nach (316) die beyden Brüche, zwischen welche die Wurzel fällt. Es müßten denn zwo Wurzeln zwischen ein paar solche Brüche, und folglich zwischen beyde ganze Zahlen fallen. (318)

320. Ex. Aus $x^3 - 50x - 120 = y$ wird $- 8$ und $+ 159$ für $x = 8$ und $= 9$; Also liegt die Wurzel viel näher bey 8 als bey 9; Man setze $x = 8,1$ so kömmt $y = + 6,441$ und die Wurzel fällt zwischen 8, und 8, 1 daß man sie also 8, o annehmen darf, wenn man sie nicht genauer als bis auf Zehntheile sucht.

321. Aufg. Wenn man die Wurzel in Zehntheilchen hat, sich ihrem Werthe so viel man will zu nähern.

Aufl. und Exempel. I. Im Exempel (320) ist die Wurzel etwas mehr als 8. Also muß zu 8 noch etwas kommen, den Werth der Wurzel zu ergänzen. Man heisse diese noch unbekannte Ergänzung; p, und setze; $x = 8, o + p$; So kömmt für $y = o$;

$$x^3 = 512 + 192\,p + 24\,p^2 + p^3$$
$$-50x = -400 - 50$$
$$-120 = -120$$

A) $o = -8 + 142\,p + 24\,p^2 + p^3$

II) Diese Gleichung ist cubisch wie die vorige, und würde uns also p, nicht leichter zeigen als die vorige x; wenn wir alle ihre Glieder beybehalten wollten. Aber p ist ein eigentlicher Bruch, dessen höhere Potenzen geringer sind als die Wurzel. Es muß also beynahe $o = -8 + 142\,p$ seyn. Man nehme also dieses an, und suche daraus $p = \frac{8}{142}$;

III. Dieses wird aber nur beynahe wahr seyn, also darf man nicht auf diese Art p durch die Division ohne Ende fort in Decimaltheilchen $= \frac{8}{142}$ $= o,\,05633\ldots$ annehmen. Alles, was man schliessen darf, ist, daß eine oder etliche der ersten Zifern dieses Quotienten, den ich P nennen will; mit soviel Zifern des Werthes von p übereinstimmen werden. Es fragt sich, wieviel dieser Zifern seyn werden. Ich will die Regel hier geben und den Beweis am Ende beyfügen:

IIII. Man suche nähmlich in dem Quotienten soviel Zifern, soviel Stellen zwischen seiner höchsten Zifer und der Stelle der Ganzen leer bleiben, oder: wenn sie von der Ordnung - n ist, (Ar. II. 7.) so suche man n - 1 Zifern, d. i. man

suche ihn bis auf die Ordnung — (2n-2) oder —. 2n+2.

V. In III. ist n = 2 also sucht man 1 Zifer oder man sucht den Quotienten bis auf die Ordnung-2.

VI. Weil man auf diese Art nur ein Stück der Ergänzung p findet, das Stück nähmlich, mit dem sie sich anfängt, das man das erste nennen kann, und zu dem noch eine neue Ergänzung q kommen muß, wenn p vollständig seyn soll, so setze man p = o,o5 + q und brauche diesen Werth in A; so kömmt

$$\left.\begin{array}{rrr} p^3 = 0{,}000125 & +0{,}0075 & \\ +24p^2 = 0{,}06 & +2{,}4 & \\ +142p = 7{,}1 & 142, & \end{array}\right\} \begin{array}{l} q+0{,}15 \\ +24, \end{array} \Big\} q^2+q^2$$

$$-8 = -8$$

$o = -0{,}839875+144{,}4075q+24{,}15q^2+q^3$ (B

Hier läßt man wieder die höhern Potenzen von q weg, und nimmt an $q = \frac{0{,}839875}{144{,}4075} = 0{,}0058$

wo man nach IIII zwo Zifern sucht, weil hier n = 3

VII. Nun setze man q = o, oo58 + r und setze diesen Wehrt statt q in B, so kömmt

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & -12 & -8 & \\
q^3 = & 195112 & + 10092 & \left.\begin{array}{r} r + 0,0174 \\ + 24,15 \end{array}\right\} & r^2 + r^3 \\
 & & -9 & & \\
+24,159^2 = & 812406 & + 0,28014 & & \\
+ 144,0759 = & 0,8375635 & + 144,075 & & \\
- 0,839875 = & -0,839875 & & &
\end{array}
$$

$$0 = -,001498898888 + 144,35524092r + 24,1674r^2 + r^3$$ (C

wornach man nach IIII; $r = 0,00001038$ findet.

VIII.

VIII. Nun addire man die I; V; VI; VII; gefundenen Theile der Wurzel, so kömmt:

VIIII) $x = 8, = 8,$
$+p = +0,05$
$+q = +0,0058$
$+r = +0,00001038$

$x = +8,05581038$ u. s. w.

X) Man sucht nehmlich zu dem ersten Stücke des Werthes von x (320) die Ergänzung p; vermittelst der Gleichung A; Fände man diese Ergänzung völlig, so wäre die Arbeit vollendet. Man findet aber nur ein Stück von ihr. (V) also sucht man dieses Stückes Ergänzung q, durch B. Man findet vor ihr wieder ein Stück VII; und sucht dessen Ergänzung r durch C; und so findet man von jeder Ergänzung das erste Stück, oder den Anfang und sucht dessen Ergänzung. Die Summe aller dieser ersten Stücken wird sich also dem Werthe der Wurzel immer mehr und mehr nähern.

XI. Der Beweis dieses Verfahrens beruht auf folgenden Betrachtungen: Die Hauptgleichung, deren Wurzel man eigentlich sucht, wie A (I) steige auf soviel Grade man will; und der nach 321 gefundene Theil der Wurzel heisse a; so ist $x = a + p$; Nun heisse der nach IIII gefundene Theil von p; b; so ist (VI) $p = b + q$ und wenn c der nach VII gefundene Theil von q heißt, so ist $q = c + r$; also $x = a + b + c + r$; So ist klar, daß jede neue

Er-

Ergänzung zu den schon gefundenen Theilen der Wurzel addirt, x geben soll. Man kann also diese gefundenen Theile der Wurzel zusammen als ein Stück ansehen, so ist offenbahr, daß die Gleichung für jede neue Ergänzung unmittelbar herauskommen müßte, wenn man die Summe aus ihr und dem schon gefundenen Stücke der Wurzel, das ich d nennen will, statt x in die Hauptgleichung setzte, welches das Verfahren (273) ist. Es heisse also eine Ergänzung überhaupt, sie mag die erste, zweyte, dritte, u. s. f. seyn; t und für sie sey M) $v = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 \ldots$ so hat M soviel Abmessungen als die Hauptgleichung; und kömmt aus ihr, wenn man d + t statt x setzt. Also bestimmt jeder Werth von t einen von x; und man könnte aus M alle x vermittelst aller t finden. Man sucht aber nicht alle t; nicht alle Grössen, die zu d kommen müssen, alle x daraus zu machen, sondern nur das t, das kleiner als 1 ist, und zu d gesetzt ein x gibt. Man nehme also an, t in Decimaltheilchen ausgedrückt habe keine höhere Zifer als von der Ordnung — n; und die Ergänzung t betrage folglich weniger als eine 1 von der Ordnung -n + 1.

XII) Die höchste Zifer im Quadrate von t kann nicht höher als von der Ordnung — 2n + 1 seyn. Denn das Quadrat von t muß kleiner seyn als das Quadrat einer 1 von der Ordnung — n + 1; aber das Quadrat dieser 1 ist eine 1 von der Ordnung — 2n + 2; folglich kann das Quadrat von t, kei-

ne

ne und also gar keine Ziser der Ordnung — 2n + 2 enthalten.

XIII) Eigentlich ist das Quadrat der höchsten Ziser in t; von der Ordnung — 2n; aber dieses Quadrat kann zwo Zifern enthalten; wenn seine Wurzel, die höchste Ziser von t, grösser als 3 ist; Also kann des Quadrats höchste Ziser von der Ordnung — 2n + 1 seyn, und der Beweis thut dar, daß was für Zifern auch nach der höchsten in t folgen, doch das Quadrat von t keine höhere Ziser als von der Ordnung — 2n + 1 enthalten kann. Aehnliche Betrachtungen sind Ar. IIII. 13. angestellt worden.

XIIII) Der Würfel, die vierte, fünfte u. s. w. Potenz von t, sind kleiner als der Würfel, die vierte, fünfte u. s. w. Potenz einer Einheit von der Ordnung — n + 1; Sie enthalten also keine Zifern von der Ordnung — 3n + 3; — 4n + 4; — 5n + 5; u. s. w. oder ihre höchsten Zifern sind von der Ordnung — 3n + 2; — 4n + 3; — 5n + 4 u. s. w.

XV) Man setze t aus seinem ersten Stücke e und desselben neuer Ergänzung u; zusammen (wie in VI) die höchste Ziser in e muß von der Ordnung — n; seyn (XI) man nehme an, die niedrigste, soll von der Ordnung — 2n + 2, und die höchste in u von der Ordnung — 2n + 1 seyn. So setze man e + u statt t in M) dieses gibt,

N) $o = \alpha + \beta e + \beta u + \gamma t^2 + \delta t^3$ also

O) $\frac{-\alpha}{\beta} = e + u + \frac{\gamma t^2}{\beta} + \frac{\delta t^3}{\beta} = e + E$

XVI) Wenn der Theil E; bejaht ist, und keine Zifer von der Ordnung $-2n+2$ enthält, so ist der Quotient $-\alpha : \beta$ bis auf die Ordnung $-2n+2$ mit e einerley, wie die Gleichung O zeiget. Aber diese Voraussetzung trifft meistens ein.

XVII) Man kann leicht, zeigen wie richtig sie seyn würde, wenn $\gamma : \beta$; $\delta : \beta$, u. s. w. $= 1$ wären, die Summe der Reihe $t^2 + t^3 \ldots . t^n$ betrüge $\frac{t^2 - t^n}{1 - t}$ (99) also allemal weniger als $\frac{tt}{1-t}$ also allemahl weniger als eine Einheit von der Ordnung $-2n+2$ Weil nun u auch kleiner ist als eine solche Einheit (XV) also wäre F gewiß kleiner als eine 2 von dieser Ordnung, das heißt, es enthielte in dieser Ordnung nicht mehr als eine 1 und seine übrigen Zifern wären alle niedriger. Und so hoch könnte E nur steigen, wenn t einer Einheit von der Ordnung $-n+1$ sehr nahe käme, d. i. wenn seine höchsten Zifern ziemlich groß wären.

XVIII) Wäre z. E. $t = 0,009999$; wo $n = 3$; und $e = 0,0099$; $n = 0,000099$ so fände man

$t^2 = 0,\ 9998 \ldots .$
$t^3 = 0,\ 999 \ldots$

$E = 0,\ 0001999$

Also

Also hat F eine 1 in der Ordnung — 2n + 2 die hier — 4 ist.

XVIIII) Sind aber die Coefficienten γ: β; δ: β; sehr groß, so können die Theile von E in denen sie sich befinden, schon einzelne Zifern von der Ordnung — 2n + 2 und noch höhere enthalten; wäre z. E. δ: β = 100 000 000 und t wie in XVIII; so wäre δt^3; β grösser als 99 und betrüge also für sich viel mehr als e.

XX) In diesem Falle müßten, wofern die Voraussetzung (XVI) ja noch statt finden sollte, einige Theile von F bejaht, andere verneint seyn, damit sich, soviel als hiezu erfodert wird, in ihnen aufhübe.

XXI) Die Coefficienten (XVIII) werden durch die Coefficienten der Hauptgleichung vermittelst der Arbeiten bestimmt, die man nach und nach vorgenommen hat, um auf M zu kommen. So werden die Coefficienten bey A (I) unmittelbahr aus den Coefficienten der Hauptgleichung, und die bey B (VI) aus den Coefficienten von A, und die bey C (VII) aus den bey B bestimmt. Folglich läßt sich von den Coefficienten bey M nichts überhaupt sagen, weil die Coefficienten der Hauptgleichung auf unzählige Arten mannigfaltig seyn können.

XXII) Ist E eine e entgegengesetzte Grösse, so ändert es allemahl die letzten Zifern in e wenn auch in E keine Zifern wären, die so hoch stiegen als die niedrigsten in e. Es sey e = 0,0099 und E = —

0,000001

o,oooooor so ist $-\frac{\alpha}{\beta} = e + E = o,oc9899$; wo also e mit $-\alpha:\beta$ nicht bis auf die Ordnung $-2n+2$ die hier -4 ist übereinstimmen würde, obgleich E keine Ziffern in dieser Ordnung hat.

XXIII) Man nimmt also die Voraussetzung (XVI) an, um eine Regel zu haben, auf wieviel Ziffern man den Quotienten $-\alpha:\beta$ suchen dürfe. Eigentlich zeigt diese Regel nur, man dürfe ihn nicht weiter suchen, weil F meistens Ziffern von der Ordnung $-2n+1$ und gewiß von der $-2n$ enthält, wofern sich nicht etwa durch ganz besondere Verhältnisse der Coefficienten bey den Theilen von E; diese höchsten Ziffern, die in einem und dem andern gewiß einzeln zu finden sind, bey der Zusammensetzung aufheben.

XXIIII) So wäre also der Nutzen dieser Regel doch der, uns die Mühe zu ersparen, daß wir die Division nicht bis auf Ziffern fortsetzen, die zuverläßig unbrauchbar seyn würden.

XXV) Wenn man aber auch, indem man sie beobachtet, fehlte, oder wenn man sie selbst nicht recht beobachtete, so wird doch der Fehler, wofern man sonst nach den gegebenen Vorschriften verfährt, allemahl nur kleine Brüche betragen, und durch die folgende Ergänzung verbessert werden. Hat man nähmlich das Stück von t das man bey gegenwärtiger Arbeit finden sollte, kleiner angenommen, als

als man es hätte annehmen sollen, so wird das fehlende in der folgenden Ergänzung enthalten seyn: Ist es aber zu groß angenommen worden, so wird die folgende Ergänzung der vorhergehenden entgegengesetzt seyn, um dieses, was zuviel war, zu vermindern.

XXVI) So setze man in (VI) $p = c, 056 + q$; dieses gibt

$$\left.\begin{array}{rrrr} p^3 = & 0,000017561 & 6 + 0,009408 & \\ +24p^2 = & 0,075264 & +2,688 & \\ +142p = & 7,952 & +142, & \\ -8 = & -8 & & \end{array}\right\} q \ldots$$

$$o = -o, 027439616 + 144, 697408 q \ldots$$

daraus findet sich $q = -o, 00018 \ldots$

$p = +o, 056$

gibt $p + q = +o, 0558$

Weil nähmlich in q noch Zifern nach der letzten 8 folgen sollen, so ziehe ich diese 8 so ab, als wenn die Zifer unter ihr in p eine o über die man weggeborgt hat, eine 9 wäre; und so kommen die Zifern für $p + q$ hier, wie nach der regelmäßigern Rechnung (VIIII)

XXVII) Die zuverläßige Probe der ganzen Arbeit ist, wenn man $a + b + c \ldots + t$ (XI) oder das erste Stück der Wurzel und die Ergänzungen, soviel man ihrer hat, zusammen statt x in die Hauptgleichung setzt. Alsdenn müssen alle Glieder der

Haupt-

Hauptgleichung zusammengerechnet eine Grösse von eben dem Zeichen geben wie alle Glieder der Hauptgleichung geben, wenn man in sie a statt x setzet, und jene Grösse muß weniger von o unterschieden seyn, als diese. Wären nähmlich die erwähnten Grössen von verschiedenen Zeichen, so läge die Wurzel zwischen den beyden angenommen Werthen von x (316)

XXVIII. Dieses Verfahren verdoppelt ordentlich die Menge der schon gefundenen Zifern, und führt also bald sehr weit, wenn man nur die ersten gefunden hat.

XXXI. Man kann sich desselben auch zu Ausziehung der Wurzeln bey reinen Gleichungen bedienen. Es sey $\sqrt[3]{2} = 1,259 + p$ so ist

$$2 = 1,995616979 + 4,755243p + 3,77p^2 + p^3$$

also kömmt für p (Ar. III. 14.)

4, 755243 | 0, 004383021 (0, 000921
4279716

103305
95104

8201
4755

3446

und die Cubikwurzel 1, 259921

XXX) Man hat verschiedene andere Arten die Aufgabe aufzulösen. Alle kommen im Grunde darauf an, daß sie Ergänzungen suchen. Die gegenwärtige scheint mir die bequemste. Sie ist in Newtons Method of Fluxions Introd. §. 19. zu finden. Man s. auch Halleys Methodum inueniendi radices aus den philosophical Transactions im Anhange zu Gravesands Ausgabe von Newtons Ar. vniuersali p. 245.

Von den krummen Linien.

322. Erkl. In einer Reihe von Grössen, erfolgt das Wachsthum oder das Abnehmen derselben, nach dem Gesetze der Stetigkeit (lege continui) wenn nach jedem Gliede der Reihe eines folget, oder vor ihm vorhergehen kann, das so wenig als man nur will von dem angenommenen Gliede unterschieden ist, so daß der Unterschied zweyer nach einander folgenden Glieder, weniger als jede gegebene Grösse betragen kann. Im Halbkreise AKB 7 F. sind die Perpendikel auf den Durchmesser Dd; Ee; Ff, als die Sinus der Bogen AD; AE; AF, in einer solchen Reihe. Zwischen jedes Paar nähmlich, wie Dd; Ee; läßt sich ein Perpendikel G g setzen, so daß der Unterschied jedes Sinus Dd von seinem nächstfolgenden kleiner als jede, gegebene Grösse werden kann. Der Sinus eines Bogens heißt also eine veränderliche Grösse. Bedeutet y das allgemeine Glied einer solchen Reihe

(9) so nennt man y eine veränderliche Grösse. Wenn von einem Gliede m, bis zu einem andern n, die Glieder beständig wachsen ohne dazwischen abzunehmen, so ist jede Grösse, die grösser als m und kleiner als n ist, ein Glied der Reihe zwischen m und n.

323. Erkl. Eine veränderliche Grösse y; die auf was für Art man will durch eine andere veränderliche Grösse x; und Grössen die immer einerley Werth behalten, wenn gleich x und y andere Werthe bekommen, durch beständige Grössen bestimmt wird; heißt eine Function von x. Zunächst betrachte ich nur algebraische Functionen, wo eine Gleichung von der Art wie wir haben kennen lernen, gegeben ist, die y; x; und gegebene Grössen enthält.

324. Er. Es sey Ad = x; dD = y; AB = a; so ist $y^2 = x.(a-x)$ (S. 31. S.) dieses bleibt noch wahr, wenn x nach der Reihe Ad; Ag; Ae; Af; jedes Stück des Durchmessers von A an gerechnet, und y nach der Reihe dD; gG; eE; fF; das Perpendikel durch das Ende jedes Stückes bedeutet. Also ist y ein allgemeines Glied der Reihe der Perpendikel, und x ein allgemeines Glied der Reihe der Stücken des Durchmesstrs. Nun wird y allemahl durch x und die unveränderliche Grösse a bestimmt, welche letztere nähmlich einerley bleibet, x mag bedeuten welches Stück des Durchmessers es will. So ist y eine Function von x.

325. Zus. Wenn sich x ändert, muß sich y ändern, weil sonst eines durch das andere nicht bestimmt würde. Ich sage damit nicht, daß jeder andere Werth von x einen andern von y geben müsse, denn wenn C des Kreises Mittelpunct und $Cd = Cd$ ist, so gehören gleiche, d. i. hier einerley y, oder $dD = d\Delta$ zu Ad; Ad, als verschiedene x. Ich behaupte nur so viel, daß der Reihe der x eine Reihe der y zugehören müsse, deren Glieder sich nach dem Gesetze, wie y durch x bestimmt wird, ändern.

326. Zus. y kann durch x so gegeben seyn, daß einem x mehr als ein y zugehört. So gehören in der 7 F. zu jedem Ad; zwey dD die von d nach entgegengesetzten Seiten des Durchmessers liegen, und also einander entgegengesetzt sind. (Ar. I. 90.)

327. Es sey $y^2 = 10y - x^2$ oder $y = 5 \pm \sqrt{(25 - x^2)}$. So gibt es für jedes x ein y wenn das obere Zeichen bey der Wurzelgrösse, und eines, wenn das untere gebraucht wird. Es gibt also für die Reihe der x; zwo Reihen von y; die erste Reihe, derer jedes Glied $5 + \sqrt{(25 - x^2)}$ und die andere, deren jedes Glied $5 - \sqrt{(25 - x^2)}$ heißt. So gehören zu $x = 4$; $y = 5 \pm \sqrt{(25 - 16)}$ d. i. 5 ± 3; oder $y = 8$ und $y = 2$; also zu

x =	−5;	−4;	−3;	−2;	−1;	0		
y d. I. R. =	5;	8;	9;	+9,582;	9,898;	10		
d. II. R. =	5;	2;	1;	+0,418;	0,102;	0		

zu +1 und −1; +2 und −2; +3 und −3 u. s. w. gehö-

gehören gleiche y, (31) also wird jede Reihe für die positiven x von dem Werthe, den ihr x für x = o hat, eben so fortgehen, wie sie von eben dem Werthe an, rückwärts für die verneinten, fortgehet. In der 8 F. sind

x = At; Af; Ar; Aq; Ap; o
y. I. ℜ; = tK; fΦ; rE; qΔ; pA; AB
y II. ℜ; = tK; fφ; rε; qδ; pλ; o

Eben so grossen entgegengesetzten x; AP = Ap u. s. w. gehören eben die Reihen von y; PL = pΛ; Pl = pλ; QD = qΔ u. s. w. zu. Alle die Endpuncte der y für alle x; wenn man die y durch Perpendikel auf tT durch die Enden der zugehörigen x ausdrückt, liegen in einem Kreise, dessen Durchmesser AB = 2 BC = 10; denn es sey überhaupt AS = x = Of; Sf = y = AO so ist OB = 10 - y und AO.OB = Of² oder (10 - y). y = x² oder 10 y — y² = x²

328. Zus. Wenn in der Gleichung zwischen y und x; die erste Grösse bis auf die Potenz n steigt, so gehören zu jedem bestimmten Werthe von x; n Werthe von y (223) darunter vielleicht unmögliche seyn können. Und so gehören zu der Reihe von x; n Reihen von y. Es kann auch zu einem y mehr als ein x gehören, wenn x auf eine höhere Abmessung steigt; nähmlich x kann auch als eine Function von y betrachtet werden. Wenn 2; 3; 4; u. s. w. Werthe von y zu jedem x gehören, so sagt man: y sey eine functio biformis, triformis, quadriformis, u. s. w. von x.

329. Zus. Man nehme 9 Fig. auf einer geraden Linie, AP einem gewissen Werthe von x gleich, man ziehe durch P, in einem willkührlichen Winkel, eine gerade Linie, und nehme auf solcher PM dem zugehörigen y gleich. Wenn man AQ; AR; AO; andern Werthen von x gleich nimmt; durch Q; R; O; Parallelen mit PM zieht, und auf solchen die Längen QN; RS; OL; den zugehörigen y gleich nimmt, so befinden sich die Puncte; L; M; N; S; in einer geraden oder krummen Linie, welche solchergestalt die Endpuncte aller y enthalten wird.

330. Zus. Hat y für ein x mehr als einen Werth, z. E. noch Pm; $P\mu$; für $y = AP$; so gehören die Puncte l m n f; $\lambda\mu\nu\sigma$; zu andern Reihen von y (327) aber zu eben der krummen Linie, die nähmlich die Endpuncte aller y enthält, wenn x durch alle mögliche Wehrte geht.

331. Erkl. Die Linie, auf welcher die Werthe von x (329) genommen werden, heißt die Abscissenlinie; und besonders die Axe, wenn der Ordinatenwinkel APM ein rechter ist. Die Stücken AP; oder AQ; u. s. w. heissen Abscissen, die ihnen zugehörigen PM; Pm; $P\mu$; oder QN; Qn; $Q\nu$; Ordinaten (ordinatim applicatae) A der Anfang der Abscissen; deren Functionen die Ordinaten sind (323) Ordinaten und Abscissen zusammen Coordinaten; wenn sie senkrecht auf einander stehen, rechtwinklichte Coordinaten.

332. Zus. Abscissen, die auf entgegengesetzte Seiten ihres Anfangs fallen, wie AP; AO; sind einander entgegengesetzt. (Ar. I. 90.) Ein Punct nähmlich, der von A ausginge und die Abscisse AP beschrieben hätte, müßte den Weg PA zurück, und über A hinaus gehen, um AO zu beschreiben. So würde man jene Abscisse als ein bejahtes x; diese als ein verneintes ansehen können

333. Zus. Ordinaten, die nach entgegengesetzten Seiten der Abscissenlinie zu liegen wie Pm; $P\mu$; sind einander entgegengesetzt. Stellt jene ein positives y vor, so wird diese ein negatives bedeuten. Dieses erhellt bey den genannten Ordinaten, die auf einer Linie liegen, wie 332. daß aber auch PM und $O\lambda$ entgegengesetzt sind, zeigt sich so: $O\lambda$ ist eine Grösse von entgegengesetzter Art, als sie seyn würde, wenn sie auf die andere Seite der Abscissenlinie fiele, wie OL fällt; Alsdenn aber würde sie der PM nicht entgegengesetzt seyn; folglich ist sie ihr jetzo entgegengesetzt.

334. Zus. Wenn auch gleich die Ordinaten nicht beständig allein wachsen, oder abnehmen, sondern bald wachsen, bald abnehmen, wie die Ordinaten des Kreises 7 F. von A bis an CK zunehmen, und von dar bis an B wieder abnehmen, so läßt sich doch bey jeder Ordinate dD; 7 F. eine andere wie fF zu eben der Reihe (327) gehörige so nahe bey jener annehmen, daß von jener zu dieser die Ordinaten beständig wachsen, oder beständig abnehmen.

335. Erkl. Eine Gleichung für eine Linie heißt eine Gleichung zwischen x; y und beständigen Grösſen. (323; 329)

336. Zuſ. Wenn in dieſer Gleichung ein beſtimmter Werth für x angenommen wird, ſo iſt y beſtimmt, d. i. der Punct oder die Puncte der Linie ſind beſtimmt, die dieſer Abciſſe zugehören. So ſind 9 F. M; m; μ; durch AP; und N; n; ν durch AQ u. ſ. w. beſtimmt Man ſetze AP ſtatt x; ſo ſind PM; Pm; Pμ; die Werthe von y; Man ſetze AQ ſtatt x; ſo ſind; QN; Qn; Qν; die Werthe von y u. ſ. w. Exempel ſind 325; 327. Da nun jeder Punct der Linie in einer Ordinate iſt, und dieſer Ordinate eine Abſciſſe zugehöret, ſo beſtimmt man auf dieſe Art alle Puncte der Linie, wenn man x durch alle möglichen Werthe gehen läßt. Man zieht nähmlich durch das Ende der angenommenen Abſciſſe eine gerade Linie in dem gegebenen Ordinatenwinkel, und nimmt auf ihr y von der Grösſe, wie es die Gleichung beſtimmt.

337. Zuſ. Es iſt alſo kein Punct in der Linie, der ſich nicht aus der Gleichung beſtimmen lieſſe; und die Gleichung iſt eine Erklärung der Linie, aus der ſich alles muß herleiten laſſen, was der Linie zukömmt.

338. Zuſ. Mann kann eine andere Abſciſſenlinie annehmen, und auf ſie durch eben die Puncte der krummen Linie andere Ordinaten ziehen. Zwiſchen dieſen Coordinaten wird eine andere Gleichung

ſtatt

statt finden, als zwischen den vorigen, und so kann einerley Linie verschiedene Gleichungen haben; eben wie man von einerley Sache verschiedene Erklärungen geben kann, da eine von dieser Eigenschaft, die andere von einer andern hergenommen ist.

In 327; sind AQ; QD; die Coordinaten x; y; für den Punct D. Man nehme Kg = u; gD = z für Coordinaten an; welche eben dem Puncte D zugehören; so ist $y = z + 5$; $x = u - 5$; diese Werthe in die Gleichung 327 gesetzt geben $z^2 = 10\,u - u^2$ eine andere Gleichung für eben den Kreis, wo die Abscissen auf dem Durchmesser zK von seinem Ende z an gerechnet werden, wie in 324.

339. Wilk. Satz. Die veränderlichen Grössen werden mit den letzten Buchstaben des Alphabets x; y; z; angedeutet; die beständigen mit den ersten. Auch soll, wenn es nicht anders erinnert wird; x die Abscisse; y die Ordinate bedeuten.

Die gerade Linie.

340 Aufg. Die Linie zu finden, welche der Gleichung $y = \frac{bx}{a} + c$ zugehört.

Aufl. AP; PM; und AQ; QN 10 F. sind Coordinaten; die bejahten Abscissen sollen rechter Hand ihres Anfangs, und die bejahten Ordinaten

über

über die Abscissenlinie fallen: Auch mögen jetzo a; b; c; bejahte Grössen bedeuten.

Weil $y = c$ für $x = o$; so sey $AB = c$ mit den Ordinaten parallel, und der Punct B wird in der gesuchten Linie seyn.

Weil $x = -ac : b$ für $y = o$; so nehme man $AO = ac : b$ und O ist auch in der Linie.

Weil $y - c = bx : a$ so ist $y - c : x = b : a = AB : OA$. Man ziehe durch B eine Parallele mit der Abscissenlinie, welche die Ordinaten in S; T; schneide, so ist $MS = MP - c$; $NT = NQ - c$; $BS = AP$; $BT = AQ$; $BSM = APM$ (329) $=$ $AQN = BTN$; also $MS : BS = b : a = NT : BT = BA : AO$ folglich Δ SBM $\sim \Delta$ TBN (G. 28 S.) also SBM $=$ TBN (G. 27. S. Zus.) oder BM; BN fallen in eine gerade Linie, welche mit BT den Winkel $MBS = BOQ$ macht, und also wegen der Parallelen BT; OQ, die verlängerte OB ist. Nun sind PM, QN; willkührlich angenommen; also gilt dieses von allen Ordinaten, oder die Gleichung gehört für die gerade Linie OB.

341. Zus. Den verneinten Abscissen wie AR; $= -\frac{ac}{b} - e$ gehören verneinte Ordinaten $RS =$

$\frac{b.}{a}(-\frac{ac}{b} - e) + c = -c - be : a + c$

$= -be : a$ zu.

342.

342. Zus. Für die Gleichung $y = bx : a - c$ wäre $x = + ac : b$ für $y = o$; oder O der Durchschnitt der geraden Linie mit der Abseissenlinie, siele rechter Hand des Anfangs der Abseissen. Hier ist nähmlich c dem vorigen (337) entgegengesetzt.

343. Zus. die Gleichung (337) begreifft alle in sich, wo x; y; nur von der ersten Potenz, und nicht mit einander multiplicirt sind. Die $y = bx : a$ ist ein besonderer Fall für sie, wo $c = o$; Es ist also eine allgemeine Gleichung vom ersten Grade und sie, in dieser Allgemeinheit betrachtet, oder auch jede Gleichung vom ersten Grade, gehört für eine gerade Linie.

344. Zus. Wenn $BS = AP = x$; $SM = y - c = z$; so ist $z = \frac{bx}{a}$ eine andere Gleichung für eben die gerade Linie, weil eine Linie mehr als eine Gleichung haben kann, (338) die ersten Coordinaten sind hier AP; PM; die zweyten BS; SM;

345. Aufg. Eine Gleichung für eine gegebene gerade Linie SN 10 F. zu finden.

Aufl. Man ziehe nach Gefallen eine Abseissenlinie CD, auf der man A für den Anfang der Abseissen annehme. Von einem willkührlichen Puncte M der gegebenen geraden Linie, ziehe man MP welche die Abseissenlinie in P unter einen willkührlichen Winkel MPA schneidet; so ist $AP = x$; $PM = y$; Die beyden Linien sollen einander in O schneiden;

so

so ist der Winkel O gegeben, und O; A; sind gegebene Puncte, jener weil der Durchschnitt zwoer gegebener geraden Linien allemahl gegeben ist, dieser weil man ihn nach Gefallen angenommen hat. Man ziehe AB mit PM parallel; Sie wird auch gegeben seyn, weil in dem Dreyecke OBA; die Seite OA nebst den Winkeln O; A; (= APM) gegeben sind. (G. 3. S.) Es sey also AO = m; AB = n so ist OP = m + x; und OA: AB = OP: PM (G. 25. S.) oder m: n = m + x: y oder

$$my = mn + nx \text{ oder } y = \frac{nx}{m} + n$$

diese Gleichung nun ist mit der 337 einerley, wenn man ac: b statt m; und c statt n setzt; Also hat die gerade Linie keine andere allgemeine Gleichung (342) als die 340. gefundene.

346. Zus. Der Quotient $\frac{y}{x} = \frac{n}{m} + \frac{n}{x}$ kann dem Werthe seines unveränderlichen Theiles $\frac{n}{m}$ so nahe kommen als man nur will; so daß der Unterschied n: x weniger als jede gegebene Grösse, so klein sie auch gegeben wird, beträgt; denn x kann ohne Ende wachsen, und alle gegebene Grössen übersteigen, aber n bleibt unverändert. Man kann also den Quotienten y: x allemahl so wenig als man nur will von n: m unterschieden annehmen, wenn man nur x groß genug annimmt.

347. Zus. Dieses wird so ausgedrückt: Für ein undendliches x ist y : x = n : m; und man sieht da n : x; etwas Endliches mit was Unendlichen dividirt als eine Grösse an, die verschwände, und in Vergleichung mit n : m für nichts zu achten wäre. Es ist leicht zu sehen, das eigentlich hier nur eine Näherung ohne Ende statt findet, wie (108)

348. Zus. Man lasse sich die Linie SN um den Punct B drehen, daß der Winkel OBA grösser wird; so rückt O immer weiter von A welcher seine Stelle nicht ändert; oder OA wird grösser, und kann auf diese Art alle Grössen, die sich nur angeben lassen, übersteigen. Weil nun AB ungeändert bleibt, so wird der Quotient n : m immer kleiner und kleiner und kann kleiner als jede Grösse werden, die sich angeben läßt, imgleichen wenn x einen gewissen bestimmteu Werth bekömmt, wie groß er auch seyn mag, so kann allemahl nx : m kleiner als jede Grösse werden, die sich angeben läßt, wenn nur m oder AO groß genug dazu genommen wird. Folglich kann das, was diesem Quotienten gleich ist, nähmlich y - n kleiner als jede gegebene Grösse werden; d. i. die veränderliche Ordinate y; kann von dem unveränderlichen n so wenig als man will unterschieden werden. Dieses geht vor, indem sich die Linie SN einer parallelen Lage mit CD ohne Ende nähert, wie G. 12. S. 12; 13 Zus. Für die vollkommen parallele Lage ist y = n oder unveränderlich; also nx : m = o Will man sich also in dem Falle, da SN mit CD parallel wäre, ein m; ein AO vor-

stellen

stellen, so muß man sagen, dasselbe sey so groß, daß nx : m für nichts zu achten sey, d. i. man kann für diesen Fall m unendlich nennen, und das Endliche nx mit dem Unendlichen dividirt für nichts ansehen. In der That giebt es wieder kein solches unendliches m, sondern eigentlich kann nur m über alle Gränzen wachsen, und folglich nx : m dem o so nahe kommen als man nur will.

Die Parabel.

349. Erkl. Die Parabel ist eine krumme Linie, wo für rechtwinklichte Coordinaten (332) $ax = y^2$. Die beständige Linie a heißt der Parameter und die Ordinate ist also die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der Abscisse (Nr. V. 32; 33.)

350. Zus. Zu jeder angenommenen Abscisse AP; 11 F. und dem unveränderlichen Parameter AE; findet man aus G. 31. die Ordinate PM von der man die Lage, daß sie durch P auf die Axe AP (331) senkrecht steht, aber nicht die Länge weiß. Man darf nähmlich nur über EP einen Halbkreis beschreiben, der ein auf EP durch A gesetztes Perpendikel AG abschneidet; diesem Perpendikel macht man das Perpendikel durch P gleich, welches vermittelst einer Parallele mit der Axe geschehen kann. (G. 12 S. 3. Z.) So läßt sich jeder Punct der Parabel vermittelst der gemeinen Geometrie bestimmen.

351. Zus. Weil $y = \pm \sqrt{ax}$ so gehören jeder Abscisse zwo entgegengesetzte, sonst aber gleiche Ordinaten PM; Pm; zu (333) Die Verzeichnung (350) gibt solche ebenfalls, weil man den Halbkreis sowohl unter als über der Axe beschreiben kann.

352. Zus. Die Parabel wird von der Axe in zwo ähnliche und gleiche Hälften getheilt, wie der Kreis vom Durchmesser (S. 6. Grundsz.)

353. Anm. Die Alten haben daher die Sehnen der Parabel Mm, Ordinatas und ihre Hälften PM, Semiordinatas genannt. Ich brauche diese Nahmen so, wie sie sich bey allen krummen Linien brauchen lassen.

354. Zus. Weil $y = o$ für $x = o$; so wird die Axe von der Parabel im Anfange der Abscissen A geschnitten. Man heißt diesem Ort den Scheitel der Parabel.

355. Zus. Weil ax für ein positives x allemahl positiv bleibt, und mit solchen wächset; so wachsen die Ordinatem oder $\sqrt{ax}$ mit dem Abscissen ohne Ende und über alle Gränzen fort, oder die Parabel geht auf jeder Seite der Axe mit einem unendlichen Schenckel fort. Dieser Schenkel geht über alle Perpendikel hinaus, die man auf die Axe ziehen, und über alle Parallelen, die man mit der Axe ziehen kann, daß sich also der Raum, den die Parabel auf der Seite des Punctes A wo ihre unendlichen Schenkel liegen, durchstreicht, auf keine Weise begränzen läßt. Die Schenkel gehen immer weiter

längst der Axe fort, und öffnen sich auch immer weiter auseinander.

356. Zus. Für ein verneintes x wäre ax verneint und y unmöglich. (34) Es giebt also keine Ordinaten für die verneinten Abscissen, und die ganze Parabel liegt auf einer Seite des Perpendikels AG.

357. Zus. Wenn QN eine andere Ordinate, also a. AQ = QN^2 ist, so ist $QN^2 : PM^2 = AQ : AP$; und $QN : PM = \sqrt{AQ} : \sqrt{AP}$; oder die Abscissen verhalten sich wie die Quadrate der Ordinaten; und die Ordinaten wie die Quadratwurzeln der Abscissen; (abscissae sunt in ratione duplicata ordinatarum, et ordinatae in subduplicata abscissarum.)

358. Erkl. Der Brennpunct F; heißt der Ort der Axe, wo die Ordinate FT dem halben Parameter gleich wird.

359. Zus. Also ist a. $AF = FT^2 = \frac{1}{4} a^2$ oder $AF = \frac{1}{4} a$.

360. Zus. $FM = \sqrt{((x - \frac{1}{4} a)^2 + y^2)} = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2} ax + \frac{1}{16} a^2)} = x + \frac{1}{4} a$.

361. Zus. Puncte zu finden, die in einer Parabel sind, welche AQ zur Axe, A zum Scheitel; a zum Parameter hat, verfährt man so: Man trage auf beyden Seiten des Scheitels; $AF = AL = \frac{1}{4} a$; so ist F der Brennpunct; (359) Man nehme nach Gefallen $AP = x$; und richte durch P ein unbestimmtes Perpendikel auf die Axe; Aus F beschreibe

man

man einen Kreis, dessen Halbmesser = LP = $\frac{1}{4}$a + x ist; Er schneidet das Perpendikel in M; m; zween Puncten der Parabel (360) So findet man die beyden Puncte der Parabel für jede angenommene Abscisse.

Die Ellipse.

362. Erkl. Für die Ellipse ist, bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = bx - bx^2 : a$; die beständige Grösse b, heißt der Parameter; a die grosse Axe.

363. Zus. Für y = 0 ist x erstlich = 0 zweytens = a; Wenn also die Abscissen von A 12 F. angerechnet werden, uud AB = a; so sind die Puncte A; B; in der Ellipse und in der Axe zugleich; Scheitel der Ellipse (wie 354) und ihre Entfernung ist die grosse Axe.

364. Zus. Weil $y = \pm \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$ so gehören zu jeder Abscisse zwo entgegengesetzte, sonst gleiche Ordinaten, und die Ellipse wird von der Axe in ähnliche Hälften AMDB; AmdB getheilet.

365. Zus. Für $x = \frac{1}{2}a = AC$ ist $y = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ = CD; das doppelte dieser Linie, Dd, heißt die kleine Axe (axis coniugatus) C der Mittelpunct.

366. Zus. Die halbe kleine Axe sey $= \frac{1}{2} c$;
so ist $c^2 = ab$ also $\frac{c^2}{a} = b$ oder der Parameter ist die dritte Proportionallinie, zu der grossen und zu der kleinen Axe.

367. Zus. Also $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$

368. Zus. Wenn $CP = u$; also $x = \frac{1}{2}a - u$; so ist $\frac{c^2}{a} \cdot (\frac{1}{2}a - u) - \frac{c^2}{a^2} \cdot (\frac{1}{2}a - u)^2$ oder $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2} = y^2$ eine Gleichung für die Ellipse, die Abscissen aus dem Mittelpuncte gerechnet.

369. Zus. In dieser Gleichung, geben entgegengesetzte, sonst gleiche u; einerley y; Wenn also $CQ = CP$ genommen wird, so ist $QN = PM$; $Qn = Pm$; und Dd theilet die Ellipse auch in ähnliche Hälften DMAmd; DNBnd;

370. Zus. Der Quadrant DMA; deckt den Quadranten dmA (364) und den Quadranten DNB (369) welcher letztere den Quadranten dnB deckt, (364) also sind alle vier Quadranten gleich und ähnlich.

371. Zus. Aus (368) wird $\frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2} = u^2$;
Nun sey $CE = MP = y$; so ist $EM = CP = u$; und also hat die Gleichung zwischen CE und EM;
einers

einerley Gestalt mit der zwischen CP und PM; dorten werden die Abscissen CE auf der kleinen Axe, hier die Abscissen CP auf der grossen genommen; und eine Gleichung wird aus der andern, wenn man nur Axen und Coordinaten verwechselt. Man muß also annehmen, daß in der Gleichung 368; a die grosse Axe, c; die kleine bedeuten soll, wenn beyde nicht gleich sind.

In $u = a\sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2})}$ setze man $a = mc$ so ist $u =$

$mc\sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2})} = m\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)}$; Setzt man also $c = 2$ so ist $u = m\sqrt{(1 - y^2)}$; wo u, Ordinaten mit der grossen Axe parallel, und y Abscissen auf der kleinen Axe bedeuten können.

So braucht Maupertuis diese Gleichung Fig. de la terre Liv. I. Sec. Part. ch. 9.

372. Zus. Sind sie gleich so ist $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - u^2$ oder die Ellipse wird ein Kreis, dessen Durchmesser $= c = a = b$ (366).

373. Zus. Jede Ordinate y ist kleiner als CD und je weiter eine Ordinate vom Mittelpuncte ist, desto kleiner ist sie. (368)

374. Zus. Wenn PM; QN; zwo unbestimmte Ordinaten sind, so ist $PM^2 = b.(AP - \frac{AP^2}{a})$;

$QN^2 = b.(AQ - \frac{AQ^2}{a})$ (362). Also $PM^2 :$

$QN^1 = AP.(a-AP) : AQ.(a-AQ) = AP.PB : AQ.QB$; die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Rechtecke unter den Segmenten der Axe.

375. Zus. y^2 ist $= o$ für $u = \pm \frac{1}{2}a$ (368) und verneint, für $u > \frac{1}{2}a$; folglich gibt es keine Ordinaten für grössere Abscissen als $\frac{1}{2}a$; auf beyden Seiten des Mittelpuncts; daß also die ganze Ellipse in der Figur A M D B d m A enthalten ist.

376. Aufg. Den Brennpunct F (358) zu finden.

Auf. Aus 368; ist $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2CF^2}{a^2} = \frac{1}{4}b^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ (366) also $CF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ und $CF = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2)} = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$ welches zweene Brennpuncte F; f; in gleichen Entfernungen auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpuncts anzeigt, wie nach 369 seyn muß. Ich will $CF = Cf = e$ nennen.

377. Zus. Weil $CD = \frac{1}{2}c$; so ist $FD = fD = \frac{1}{2}a$.

Wenn $fP = w = u + \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$ so kömmt aus 368 $y^2 = \frac{c^4}{4a^2} + \frac{c^2\sqrt{(a^2-c^2)}}{a^2} w - \frac{c^2}{}$

$\frac{c^2 w^2}{a^2}$ die Abscissen von dem Brennpuncte f ge-
rechnet (376)

378. Aufg. Die Summe der Linien FM; fM; aus beyden Brennpuncten nach einem Puncte der Ellipse zu finden.

Auflö. $FM^2 = (c-u)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - 2eu + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$ (376; 368) $= \frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^2}{a^2}u^2$; Dieses ist das Quadrat von $\pm\frac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$; Nun sucht man ohne Zweifel für FM einen positiven Werth. Also muß man die Zeichen gebrauchen, bey denen die Wurzel des Quadrates positiv ist, was man auch statt u setzt, denn u soll jede Abscisse bedeuten können. Nun ist der grösste Werth, den u haben kann; $\frac{1}{2}a$ (375) dieses gibt die obern Zeichen gebraucht; die Wurzel $\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$ positiv; und folglich geben bey dem Gebrauche der obern Zeichen alle kleinere u diese Wurzel positiv; Gegentheils gibt jedes u das nicht grösser als $\frac{1}{2}a$ ist, bey dem Gebrauche der untern Zeichen, die Wur-

zel negativ. Folglich ist $FM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$

Ferner $fM^2 = (e + u)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + 2eu + u^2 + \frac{1}{4}\frac{c^2 - c^2}{a^2}c^2u^2 = \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$ also $fM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ folglich $FM + fm = a$; oder die Summe dieser Linien, ist der grossen Axe gleich.

379. Zus. Mit einem willkührlichen Stücke z; der grossen Axe beschreibe man aus F einen Kreis; und einen andern aus f mit a - z; so geben beyder Durchschnitte zweene Puncte der Ellipse, und so kann man alle ihre Puncte finden.

380. Zus. Wenn ein Faden, dessen Länge = a; mit beyden Enden in F und f befestiget, und alsdenn mit einem Stifte in die Lagen FMf ausgedehnet wird, so beschreibt der Stift die Ellipse. (Astr. 236.)

381. Zus. Je näher F; f; zusammen, oder an C rücken, desto geringer ist e (376) und $fM - FM = \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ (378) $= \frac{4ue}{a}$ desto näher kömmt also die Ellipse einem Kreise, dessen Halbmesser $= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(FM + fM)$ und der Mittelpunct C;

C; für e = o wird sie völlig in diesen Kreis verwandelt. S. Astr. 235. 238.

382. Zus. Die Weite des Brennpunctes vom Scheitel A, ist $\frac{a \mp \sqrt{(a^2 - ab)}}{2}$ (378; 366) das obere Zeichen für AF das untere für Af.

Vergleichung der Ellipse mit der Parabel.

383. Lehrs. AM; AN; 13 F. sind Bogen von einer Ellipse und einer Parabel, die einen Scheitel, und beyde b zum Parameter haben. Die Bogen selbst gehören einer Abscisse x zu. Die Ordinaten PM = y; PN = z; werden desto weniger unterschieden seyn, je grösser die Axe der Ellipse ist, wenn alles übrige ungeändert bleibt.

Bew. $z^2 = bx$ (349) $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (362)

also ist $z^2 - y^2 = bx^2 : a$ welcher Unterschied der Quadrate, wenn alles übrige ungeändert bleibt, desto geringer wird, je grösser a ist. Es ist auch $z - y = bx^2 : a\,(z + y)$. Aber $z + y \backsim 2z$ weil $y \backsim z$; folglich ist $z + y \backsim a \surd bx$ und $z - y \backsim bx^2 : a$. $2 \surd bx$ oder $z - y \backsim x \surd bx : 2a$; wo also der Unterschied der Ordinaten abnimmt, wenn a wächst.

384. Zus. Gleichwohl kann dieser Unterschied nie gar verschwinden. Er kann nur, indem a wächst, kleiner als jede gegebene Grösse werden. Der Bogen der Ellipse kann also durch die Vergrösserung von a, dem Paraboliſchen immer näher und näher und so nahe als man will kommen; nie aber wird er mit ihm völlig einerley seyn. Dieses drückt man so aus: der paraboliſche Bogen ist mit einen elliptischen einerley, dessen Axe unendlich wäre. Es ist klar, daß für kleinere Abscissen AO, bey eben der Ellipse, der Unterschied der Ordinaten KL, noch kleiner als MN seyn wird, weil z-y wenn b und a unverändert bleiben, abnimmt wenn x abnimmt. Diese Betrachtung erläutert Astr. (306)

Von der Aehnlichkeit der Ellipsen.

385. Erkl. Wenn einer Ellipse grosse und kleine Axe und Parameter α; γ; β; sind, so heißt sie der Ellipse 368 ähnlich (specie eadem) wofern $a : c = \alpha : \gamma$; oder $a : \alpha = c : \gamma$ daher denn

$$b : \beta = \frac{c^2}{a} : \frac{\gamma^2}{\alpha} = \frac{c^2}{a} : \frac{\alpha^2 c^2}{a^2 \alpha}$$ oder auch

$b : a = \beta : \alpha$.

386. Zus. Die Abscisse dieser Ellipse heisse t ihre Ordinate z; also sey $z^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{\gamma^2 t^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{4a^2} - \frac{c^2}{a^2} t^2$. Nun sey auch $a : \alpha = u : t$ also

z^2

$$z^2 = \frac{\alpha^2 c^2}{4a^2} - \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha^2 u^2}{a^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}\right)$$

$= \frac{\alpha^2 c^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{c^2}$ also $z = \frac{\alpha y}{a}$ oder wenn die Abscissen sich wie die Axen verhalten, verhalten sich die Ordinaten eben so.

387. Zus. Aehnliche Ellipsen sind nur der Grösse nach unterschieden, alle beständigen Linien in ihnen sind einander proportionirt, nnd für Abscissen, die sich wie ein paar zusammengehörige Linien in beyden Ellipsen, z. E. wie die grossen Axen, oder wie die Parameter verhalten, sind die Ordinaten auch proportionirt.

388. Anm. Hierinnen liegt der allgemeine Begriff der Aehnlichkeit krummer Linien, von denen man Eulers Introd. in Analys. inf. L. II. c. 18. weiter nachzulesen hat.

389. Anm. Alle Parabeln sind einander ähnlich. denn wenn für zwo Parabeln $y^2 = bx$; $z^2 = \beta u$ und $u : x = \beta : b$ so ist $z^2 = \frac{\beta^2 x}{b} = \frac{\beta^2 . y^2}{b^2}$ oder $z : y = \beta : b$. Dieses gilt von allen Linien, deren Gleichung nur eine beständige Grösse enthält.

Die Hyperbel.

389. Erkl. Die Hyperbel ist eine krumme Linie, wo für rechtwinklichte Coordinaten; $y^2 =$

bx

$bx + \frac{bx^2}{a}$ Die Linien b ; a ; heissen wiederum Parameter und Axe, die letztere auch latus transuersum.

390. Zus. Wenn man in der Gleichung für die Ellipse ; (362) — a statt + a setzt, so wird aus ihr die Gleichung für die Hyperbel.

391. Zus. In diesem Verstande kan man die Hyperbel als eine Ellipse, deren Axe verneint wäre, ansehen.

392. Zus. Für $y = o$ ist $x = o$ oder $= -a$; Wenn also A 14 F. der Anfang der Abscissen, und zugleich ein Scheitel der Hyperbel (363) und AP eine positive Abscisse ist, so fällt der Hyperbel anderer Scheitel B ; auf die entgegengesetzte Seite, und es ist AB = a und als verneint anzusehen, wenn es mit den bejahten Abscissen verglichen wird.

393. Zus. Jeder Abscisse gehören zwo entgegengesetzte, sonst gleiche Ordinaten zu. Also theilt die Axe die Hyberbel in ähnliche Hälften.

394. Zus. Für jedes bejahte x das grösser als $= o$ ist, gibt es mögliche Ordinaten; die immer wachsen, wenn x wächset. Also geht die Hyperbel mit zween unendlichen Schenkeln, die immer weiter aus einander gehen, längst der Axe fort, wie die Parabel (355)

395. Zuf. Weil $y^2 = bx.\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{bx}{a}\cdot$

(a + x) so ist für jedes verneinte x das zwischen o und — a fällt, das Quadrat der Ordinate verneint; denn der Factor $\frac{bx}{a}$ ist für jedes verneinte x verneint, aber der a + x ist für ein x von den angegebenen bejaht. Folglich sind für diese Abscissen die Ordinaten unmöglich, oder es gibt keine Puncte der Hyperbel, deren Ordinaten zwischen A und B durchgingen.

396. Zuf. Aber sobald ein verneintes x grösser als a wird, sobald wird a + x auch verneint, folglich $\frac{bx}{a}\cdot$ (a + x) als ein Product aus zwo verneinten Grössen bejaht, und die Ordinate wieder möglich. Es gibt also für solche verneinte Abscissen mögliche Ordinaten, oder ihnen gehören Puncte der Hyperbel zu.

397. Zuf. Diese Ordinaten wachsen beständig, wenn die verneinten x wachsen. Denn in diesem Falle wird a + x immer ein grösser Verneintes, und $\frac{bx}{a}$ ebenfalls, also das Product ein grösser Bejahtes.

398. Zuf. Die Hyperbel geht von B aus auch mit zween Schenkeln; BR; Br; die sich immer weiter ausbreiten unendlich fort wie (394)

399. Zus. Wenn man $\sqrt{ab} = c$; die kleine Axe der Hyperbel, wie (366) nennt, (latus rectum; §. 389) so ist $y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$

400. Erkl. Wenn $AC = \frac{1}{2}AB$ so ist C der Mittelpunct der Hyperbel.

401. Zus. Es gibt hier keine Ordinate durch den Mittelpunct (395) wie bey der Ellipse. (365) Die Hyberbel ist nähmlich eine Ellipse, deren kleine Axe $\sqrt{-ab}$ unmöglich wäre. (391)

402. Aufg. Wenn die Abscissen $CP = u$ aus dem Mittelpuncte gerechnet werden, eine Gleichung für die Hyberbel zu finden.

Aufl. Weil $x = u - \frac{1}{2}a$; so ist aus (399) $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

403. Anm. Die Gleichung wird aus (368) wenn man $cv-1$ statt des dortigen c schreibt. (401)

404. Zus. Das Perpendikel Dd theilt die Hyperbel in ähnliche Hälften; wie (369) Man heißt sie entgegengesetzte Hyperbeln, ob sie wohl eigentlich zusammen nur eine ausmachen. Auch liegen innerhalb der rechten Winkel DCA; ACd; dCB; BCD; vermöge (393; 404;) gleiche und ähnliche Theile der Hyperbel wie 370.

405.

405 Zuſ. Für den Brennpunct F (376) iſt der Ordinate Quadrat $= \frac{1}{4} b^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ (399) $= \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$ (402) alſo wenn u hier die Abſciſſe für den Brennpunct bedeutet; $u = \pm\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$ für die beyden Längen CF; Cf; Auch iſt $AF = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}-a}{2}$

406. Zuſ. $FM^2 = (u-\frac{\sqrt{(a^2+c^2)^2}}{2}+yy =$

$u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)} + \frac{a^2+c^2}{4} + \frac{u^2 c^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$

$= \frac{a^2+c^2}{a^2} u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)} + \frac{1}{4} a^2$ alſo

$FM = \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} - \frac{1}{2} a$ wenn es poſitiv ſeyn ſoll, wie (378). Es iſt hier allemahl $u \leqq \frac{1}{2} a$ (395) Eben ſo iſt $fM^2 = \left(u+\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}\right)^2 + y^2$ und $fM = \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} + \frac{1}{2} a$; Folglich $fM - FM = a$; oder der Unterſchied dieſer beyden Linien, der groſſen Axe gleich, wie bey der Ellipſe die Summe. (378)

407. Anm. Man kann hieraus eine Art, die Hyperbel zu verzeichnen, herleiten, wie bey der Ellipse (379). Auch gründen sich auf diese Eigenschaften der Brennpuncte (360; 378; 405;) Werckzeuge, diese drey krummen Linien mit einer stetigen Bewegung zu beschreiben.

408. Zus. Für die gerade Linie CL sey $LP = z$; und $z = \frac{cu}{a}$; also $AE = \frac{1}{2} c$ (400) so ist (402) $z^2 - y^2$ oder $(z+y).(z-y) = \frac{1}{4} c^2$ also $z - y$ oder $LM = \frac{cc}{4.(z+y}$ welches, wenn u wächset, beständig abnimmt, und kleiner als jede gegebene Grösse wird, aber nie nichts werden kann, so lange u und folglich z; y; bestimmte Grössen sind. Also wird LM, die Weite des Schenkels AM der Hyperbel von der geraden Linie, immer kleiner und kleiner, und geringer als jede gegebene Grösse, aber sie bleibt allemahl noch etwas. Die Hyperbel nähert sich dieser geraden Linie immer mehr und mehr, aber sie erreicht solche nie. Diese gerade Linie heißt die Asymptote.

409. Zus. Ihr Theil CL gehört für den Schenkel AM; Ihr Theil CO für den Schenkel BS; Eben so gibt es eine andere Asymptote Nl; deren Gleichung $QN = -\frac{cu}{a}$ ist; ihre Theile CN; Cl; gehören für die Schenkel BR; Anm.

410.

410. Zus. Weil Ml = y + z; so LM. Ml. = $\frac{1}{4}c^2$ (405) also unveränderlich.

411. Zus. QM sey der Asymptote Cl parallel, so ist QML = ClL = CLl (weil PL = Pl und bey P rechte Winkel sind) also QM = QL ferner ist $CE^2 = CA^2 + AE^2$ also (408) $CE = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$ und Ee = c; Nun ist CQ : Ml = LQ : LM = EC : Ee also $CQ = \frac{(z + y).\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c}$. Auch Ee : eC = LM :

$$MQ \text{ oder } MQ = \frac{c^2}{4(z+y)} \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c}$$

$$\text{Folglich } CQ.QM = \frac{a^2 + c^2}{16}.$$

412. Zus. Man kann CQ; QM; als Coordinaten auf der Asymptote ansehen. Wenn jenes = p dieses = q; so ist $pq = \frac{a^2 + c^2}{16}$ die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

413. Zus. Wenn AI auch mit CI parallel geht, so ist CAI = ACe = ACE; also CI = AI; und $CI.AI = CI^2$. Daher $CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$ (412) Dieses

ses Quadrat nennt man die Potenz der Hyperbel.

414. Aufg. Wenn eine nach Gefallen gezogene gerade Linie, 15 F. die Asymptoten in R; ϱ; die Hyperbel in M; μ; schneidet; die Verhältniß MR; μϱ; zu finden.

Aufl. Man ziehe MD; μδ mit den Asymptoten Cϱ; CR; parallel, so ist

$$MR : MD = R\varrho : C\varrho$$
$$R\varrho : \mu R = C\varrho : C\delta; \text{ also}$$
$$MR = \frac{MD.\ \mu R}{C\delta}$$

und eben so, wie man auch nur durch gehörige Verwechselung der griechischen und lateinischen Buchstaben gleich übersieht; $\mu\varrho = \frac{\mu\delta.\ M\varrho}{CD}$; also

$$MR : \mu\varrho = CD.\ MD.\ \mu R : C\delta.\ \mu\delta.\ M\varrho$$
$$= \mu R : M\varrho\ (411) = M\mu + MR : M\mu + \mu\varrho$$

folglich $\mu R : M\varrho = M\mu$; $M\mu$ (Ar. V. §. 34. II;) oder $\mu R = M\varrho$.

415. Zus. Wenn die Lage der Asymptoten, mit einem Puncte M gegeben ist, so findet man alle übrigen Puncte, wenn man alle Linien MRϱ zieht, und allemahl $\varrho\mu = RM$ macht. Dieses findet auch statt, wenn die Puncte M; μ; in entgegengesetzte Hyperbeln (404) fallen, wie man sich leicht durch Entwerfung einer Figur dafür überzeugen kann.

416. Zus. I. Aus den gegebenen Dingen (415) sind die Axen so gegeben. Man ziehe MD mit Cϱ parallel und halbire den Winkel RCϱ durch CP; Man nehme CI = $\sqrt{CD.\ MD}$, so ist solches = $\sqrt{\frac{(a^2+c^2)}{4}}$ (412) zieht man nun IA mit Cϱ parallel, so ist CA die halbr grosse Axe, und AE senkrecht auf sie gesetzt die halbe kleine (413)

II. Der Asymptotenwinkel nähmlich allein, gibt nicht die Axen selbst, nur ihre Verhältniß. Er sey RCϱ = 2k und RCP = k; Man nehme CA = $\frac{a}{2}$ nach Gefallen, so ist die halbe kleine Axe AE = $\frac{1}{2}$a. tang k. Nähme man auf auf CP eine andere Länge = $\frac{1}{2}\alpha$; für die halbe grosse Axe, so gehörte dazu eine andere halbe kleine = $\frac{1}{2}\alpha$. tang k.

III. Für die Axe a; ist also die Gleichung der Hyperbel (402) $y^2 = u^2.\ \text{tang}\ k^2 - \frac{a^2\ \text{tang}\ k^2}{4}$

$= (u^2 - \frac{1}{4}a^2).\ \text{tang}\ k^2.$

IIII. Wäre daher in II; $\alpha \lesseqgtr a$; so gehörte in der Hyperbel deren Axe α ist, zu eben der Abscisse u (III) eine kleinere Ordinate. Oder, wenn zwischen einerley Asymtoten, zwo Hyperbeln beschrieben werden, so fällt die deren grosse Axe am grössten ist, oder die ihre Scheitel am weitesten vom Mittelpuncte hat, ganz innerhalb der andern.

V. Alle diese Hyperbeln, nähmlich zwischen einerley Asymtoten, sind einander ähnlich, wie die Ellipsen (385) und der Asymptotenwinkel bestimmt nur eine Reihe ähnlicher Hyperbeln.

VI. Ist aber noch ein Punct M gegeben so sind MD; CD; gegeben, und wenn man a. tang k statt c setzt (II) so ist aus (I) $CD.MD = \frac{1 + \text{tang } k^2}{16}$

a^2 daher $a = \frac{4\sqrt{(CD.MD)}}{\text{sec } k} = 4.\sqrt{(CD.MD)}.$ cos k (Trig. 4 Erkl. 5. Zus.) und c = 4. √ (CD. MD). cos k. tang k = 4. √ (CD. MD). sink (Trig. 4. Erkl. 3. Zus.)

VII. Hieraus lassen sich die Axen, aus den gegebenen Dingen bequem berechnen.

VIII. Exempel der Asymptoten Winkel sey 30° also k = 15; Der Punct M liege so daß von einen gewissen Maasse CD = 25; DM = 4; also CD. DM = 100 und die Wurzel daraus = 10: so ist

a = 4. cos 15°. 10 = 4. 0,96592. 10 = 38,6368 und
c = 4. sin 15°. 10 = 4. 0,25882. 10 = 10,3539

Mit den Logarithmen rechnete man so, daß man jedes Sinus Logarithmen aus den Tafeln, um 10 verminderte

log 40 = 1,6020600
log cos k = 9,9849438 — 10

log a = 1,5870038 giebt a = 38,64 —

Auch

Auch log 40 = 1, 6020600
log sin k = 9, 4129962 — 10

log c = 1, 0150562; c = 10, 36

Der Parameter $b = \frac{c^2}{a}$ (399) findet sich auch so:

2 log c = 2, 0303124
log a = 1, 5870038

log b = 0, 4433086; giebt b = 2, 774 —

VIIII. Wären CD, CM grosse Zahlen, oder auch ihr Product keine Quadratzahl, so fände man die Sache noch bequemer so:

log √(CD. DM) = ½. (log CD + log DM)

allsdenn

log a = log 4 + ½ (log CD + log DM)
+ log tab cos k — 10

log c = log 4 + ½ (log CD + log DM)
+ log tab sin k — 10

log b = 2 log c — log a.

X. Aus a u. c; giebt sich umgekehrt der Asymtotenwinkel so: tang $k = \frac{c}{a}$ (11) also (Trig. 19 S. 6. Zus.)

$$\text{tang } 2k = \frac{2c : a}{1 - cc : aa} = \frac{2ac}{aa - cc} = \frac{2ac}{(a+c)(a-c)}$$

folglich log tang 2k = log 2 + log a + log c —

(log (a + c) + log (a—c)) für den Halbmesser = 1; zu diesen Logarithmen wird also nach Trig. 20 S. Ex; noch 10 addirt um den Logarithmen dieser Tangente wie er in den Tafeln steht zu finden.

Man könnte auch sagen: log tabular tang k = 10 + log c — log a und allsdenn k verdoppeln. Aber weil man bey den gewöhnlichen Gebrauche der Tafeln k nur zwischen Gränzen die um 1 Min. unterschieden sind, findet, so finde man solchergestalt 2 k innerhalb zwo Minuten. Dieses zeigt wie brauchbar die analytischen trigonometrische Formeln sind, die Ausübung bequem und richtig zu machen.

417. Erkl. Die gleichseitige Hyperbel (aequilatera) heißt, deren Axen (389. 399) unter sich, und dem Parameter gleich sind.

418. Zus. Also ist für sie CA = AE; folglich ACE = $\frac{1}{2}$ R und der Asymptoten Winkel ECe ein rechter, daher man diese Hyperbel auch die rechtwinklichte nennt. Ihre Gleichung ist $y^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$ (402)

Von den Linien der zweyten Ordnung.

419. Erkl. Es sey 16 F. AP = x; PM = y; der Winkel APM = π; und

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2;$$

wo

wo die griechischen Buchstaben willkührliche beständige Grössen bedeuten; so heißt die krumme Linie mMNn eine Linie der zweyten Ordnung.

420. Anm. Die Gleichung ist nähmlich die allgemeinste Gleichung vom zweyten Grade. Die gerade Linie ist die von der ersten Ordnung (340.)

421. Zus. Wenn $\pi = R$; und $\circ = \alpha = \gamma = \delta = \varepsilon$; $\zeta = 1$ und $\beta = -a$ so wird aus dieser Gleichung die (349); wenn $\circ = \alpha = \gamma = \varepsilon$; $\zeta = 1$; $\delta = b$; $\beta = \pm \frac{b}{a}$ so wird aus ihr die 362; 369; Also sind Parabel, Hyperbel und Ellipse Linien der zweyten Ordnung.

422. Aufg. Aus der Gleichung (419) eine zwischen $BQ = t$; $QM = u$; zu finden, wenn die Lage der neuen Abscissenlinie CQ und der neuen Ordinaten MQ gegeben sind.

Aufl. I. Wegen der gegebenen Lage der neuen Abscissenlinie ist C gegeben, also $AC = f$; und $CB = g$; ferner $TCQ = \gamma$; $BQM = \varkappa$ folglich ist CTQ oder $\tau = 2R - \gamma - \varkappa$; und PMT oder $\mu = 2R - MPT - MTP = 2R - (2R - \pi) - (2R - \tau) = \pi - \gamma - \varkappa$.

II. $PT = y \cdot \sin \mu : \sin \tau$; und $CQ = g + t$; und $CT = CQ \cdot \sin \tau$; wie auch $= f + x + PT$; also

III) $f + x + \frac{y.\ \sin\mu}{\sin\tau} = \frac{(g+t).\ \sin\varkappa}{\sin\tau} = CT$

IIII) MT = y. sin π : sin τ und TQ = CT. sin γ : sin $\varkappa$ also weil MT + TQ = u, aus (III)

V) $\frac{y.\ \sin\pi}{\sin\tau} + \frac{(g+t).\ \sin\gamma}{\sin\tau} = u$ oder

VI) $y = (u.\sin\tau - (g+t)\sin\gamma) : \sin\pi$

VII) Folglich aus (III)

$x = \frac{(g+t).\ \sin\varkappa}{\sin\tau} - \frac{(u.\sin\tau - (g+t)\sin\gamma).\ \sin\mu}{\sin\tau.\sin\pi} - f;$

VIII) Wenn man nun diese beyden Werthe VI; VII; statt y; x; in 4ty setzt, so bekömmt man eine Gleichung zwischen u; t;

VIIII) Wäre die neue Abscissenlinie BK mit der vorigen parallel, also BKM = $\varkappa$; BK = t; KM = u; das übrige wie vorhin, so ziehe man BD mit MQ parallel und nenne DA = h; BD = k so ist $y = \frac{MT.\sin\tau}{\sin\pi}$ und MT = MK - TK = u - k also $y = \frac{(u-k)\sin\tau}{\sin\pi}$; Ferner x = AT - PT = AD + BK - PT = h + t - PT = h + t - $\frac{y.\ \sin\mu}{\sin\tau}$ (II) h + t - (u - k) . Sin μ : Sin π

X. Diese beyden Werthe VIII; bringt man auch aus V; VII; mit den gehörigen Veränderung heraus.

heraus. Wenn nähmlich BC sich um B dreht, daß C immer weiter von A rückt, so nimmt der Winkel γ bis auf Nichts ab, und AC wächst unendlich. Es ist also in VI ohne Zweifel $\sin \gamma = 0$ und $t \sin \gamma = 0$ Aber es fragt sich, was man statt $g \sin \gamma$ seßen müsse, weil von diesem Producte der eine Factor immer grösser wird, indem der andere abnimmt. Das läßt sich so beantworten: Es ist überhaupt CB: BD = sin CDB: sin BCD; = sin τ: sin γ (I) = sin $(\gamma + \varkappa)$: sin γ also g: k = sin $(\gamma + \varkappa)$: sin γ und g. sin γ = k. sin $(\gamma + \varkappa)$. Der leßte Wehrt kann also allemahl statt g. sin γ gesetzt werde. Eben so ist allemahl CD = f + h; und g: f + h = sin τ: sin $\varkappa$.

In gegenwärtigen Falle nun wo $\gamma = 0$; und sin τ = sin $\varkappa$; wird g. sin γ = k. sin $\varkappa$ und g = f + h daher wird der allgemeine Werth von x in (VII) für gegenwärtigen Fall

$$= g + t - \frac{(u. \sin \varkappa - k. \sin \varkappa). \sin \mu}{\sin \varkappa. \sin \pi} - f$$

$= h + t - (u - k)$. sin μ: sin π wie in (VIII)

XI. Das bisher gewiesene Verfahren ist allgemein, und gilt, die Gleichung jeder krummen Linie zwischen AP; PM; in eine andere zwischen BQ; QM; oder BK; KM zu verwandeln.

423. Zus. Wenn die Werthe von x; y; VI; VII oder VIIII; in 419 gesetzt werden; so enthält das Quadrat von x; folgendes Veränderliche t^2; u^2;

ut; jedes nähmlich mit einem veränderlichen Coefficienten multiplicirt, wozu denn noch ein völlig unveränderlicher Theil kommen wird. Eben das gilt von dem Quadrate von y; imgleichen von xy; Nirgends kömmt hier von t oder u eine höhere Potenz vor als die zweyte. Daß diese in x; y selbst nicht einmahl vorkommt, fällt in die Augen. Also wird die neue Gleichung so aussehen: wo ich Sterne statt der Coefficienten seße, um die ich mich hier gar nicht bekümmere.

$$o = * + * t + * u + * t^2 + * tu + * u^2$$

In dieser Gleichuug können Coefficienten $= o$ seyn, oder Glieder fehlen, aber mehr als hier stehen, kann sie nicht haben. Es erhellt, daß t und u in ihr hier eben so vorhanden sind, wie x; y; in 419.

424. Zus. Die Gleichung (419) enthält alle Gleichungen für jede krumme Linie der zweyten Ordnung; was auch der Ordinatenwinkel seyn, und was die Abscissenlinie für eine Lage haben mag, wenn man nur für jeden Fall die Coefficienten gehörig bestimmt.

425. Zus. Wenn die Gleichung vom zweyten Grade bleiben soll, so können nicht δ; ε; ζ; alle drey zugleich $= o$ seyn. Wäre $o = \delta = \zeta$; aber ε etwas, so würde aus der Gleichung (419) eine durch Veränderung der Coordinaten (423) wo die Quadrate der neuen Coordinaten, oder wenigstens eines darinnen wäre. Daher wäre in diesem Falle die

die Gleichung (419) doch für eine Linie der zweyten Ordnung.

426. Lehrs. Keine Linie der zweyten Ordnung kann von einer geraden Linie in mehr als zween Puncten geschnitten werden.

Bew. PE sey eine willkührlich gezogene gerade Linie, man ziehe eine willkührliche Abscissenlinie AP, die sie in P schneide, und suche die Gleichung für die Coordinaten $AP = x$; $PM = y$. Weil in dieser Gleichung y nicht höher als auf das Quadrat steigen kann, (424) so gibt es für ein AP nicht mehr als zwo Ordinaten PM; PN; d. i. die gerade Linie kann nicht mehr als zweene Durchschnittspuncte M; N; mit der krummen haben.

427. Aufg. Von einer Linie der zweyten Ordnung sind fünf Punete M; N; F; G; H; gegeben; Man soll die Coefficienten (419) für willkührlich angenommene Coordinaten bestimmen.

Aufl. Man ziehe durch zween der gegebenen Puncte N; M; eine Ordinate; NMP; und mit ihr die andern FI; GS; HL; parallel. Die Längen dieser Linien, nebst ihren Durchschnitten mit der willkührlich angenommenen Abscissenlinie sind also gegeben. Daher ist

I) $o = \alpha + \beta . AP + \gamma . PM + \delta . AP^2 + \varepsilon . AP . PM + \zeta . PM^2$

II)

II) $\circ = \alpha + \beta . AP + \gamma . PN + \delta . AP^2 + \varepsilon . AP . PN + \zeta . PN^2$

III) $\circ = \alpha + \beta . AI + \gamma . IF + \delta . AI^2 + \varepsilon . AI . IF + \zeta . IF^2$

IIII) $\circ = \alpha + \beta . AS + \gamma . SG + \delta . AS^2 + \varepsilon . AS . SG + \zeta . SG^2$

V) $\circ = \alpha + \beta . AL + \gamma . LH + \delta . AL^2 + \varepsilon . AL . HL + \zeta . LH^2$

In diesen fünf Gleichungen sind die Linien gegebene Grössen, und man hat nur fünf unbekannte, nähmlich $\alpha : \zeta$; $\beta : \zeta$; $\gamma : \zeta$; $\delta : \zeta$; $\varepsilon : \zeta$; weil man durchgängig mit ζ dividiren kann. Jede dieser gegebenen Grössen ist nur von der ersten Abmessung, und nirgends eine mit der andern multiplicirt, man findet also für jede einen einzigen Werth, (63) der allemahl möglich ist, (34) weil hier keine Wurzeln ausgezogen werden.

428. Zus. Fünf Puncte bestimmen eine einzige krumme Linie der zweyten Ordnung. Es dürfen aber von ihnen nicht drey in einer geraden Linie liegen (426). Nähme man sie so an, so würde man für die gesuchte Linie eine Gleichung des zweyten Grades bekommen, die aber nicht für eine zusammenhängende krumme Linie, sondern für zwo gerade Linien gehörte; z. E. für die gerade Linie durch NFG; und für die durch MK; diese Gleichung würde sich in zweene einfache Factoren $(y - ax - b)$. $(y - cx - d)$ zerfällen lassen; deren Product

$y^2 - axy$

$$yy - axy - by + acx^2 + bcx + bd$$
$$- c \quad - d \quad + ad$$

keine Gleichung für eine krumme Linie ist, sondern die beyden Gleichungen für zwo gerade enthält, aus denen es entstehet.

429. Zus. Zwo Linien der zweyten Ordnung können einander in nicht mehr als vier Puncten schneiden.

430. Anm. Damit wird nicht geläugnet, das besondere Gattungen solcher Linien, schon durch weniger Puncte bestimmt werden, und einander auch nicht einmahl in vier Puncten schneiden können. Ein Exempel ist der Kreis. (§. 17 S. 4.) Die Sache muß aus den besondern Bestimmungen erkläret werden, welche die allgemeine Gleichung bekömmt, wenn man sie für eine solche besondere Gattung einrichtet. Die 17 F. stelle einen Kreis vor, dessen Mittelpunct C und der Halbmesser $= r$ ist. Will man die Abscissenlinie nach Gefallen annehmen, so ziehe man die Ordinaten senkrecht auf sie: Will man die Ordinaten nach Gefallen annehmen, so setze man die Abscissenlinie senkrecht durch sie. Also läßt sich der Kreis allemahl durch eine Gleichung zwischen senkrechten Coordinaten bestimmen. Mit der Abscissenlinie sey ein Durchmesser ICG parallel, also das Perpendikel auf die Abscissenlinie $CD = h = LP$; und $AH = g$; $LG = PH = g - x$, $LC = LG - CG = g - x - r$ und aus der Natur des Kreises $LC^2 = CM^2 - LM^2$ oder $(g - x - r)^2 = r^2 - (h - y)^2$, wo nur drey Grössen g, r, h zu bestimmen sind, auch giebt diese Gleichung geordnet

$$g^2 + 2.(r - g)x - 2hy + x^2 + y^2$$
$$- 2rg$$
$$+ h^2$$
$$= 0$$

Folglich ist in 419 allemahl für den Kreis $\alpha = g^2 - 2rg + h^2$; $\beta = 2(r - g)$; $\gamma = -2h$; $\delta = 1$; $\varepsilon = 0$; $\zeta = 1$. Es lassen sich daher in 427 nur drey Grössen als unbekannt ansehen, aber δ, ε, ζ sind schon gegeben, daher kann man nach 427 nur drey Puncten zur Bestimmung eines Kreises annehmen, weil man α, β, γ zu bestimmen nur drey Gleichungen annehmen darf.

Eben so werden andere Linien der zweyten Ordnung durch weniger als fünf Puncte bestimmt, wenn statt der fehlenden Puncte andere Bestimmungen angegeben sind. Z. E. die Parabel 11 F. ist durch die Lage ihrer Axe; den Scheitel A; und einen einzigen andern Punct M gegeben; Weil alsdenn MP; AP gegeben sind und $MP^2 : AP$ den Parameter giebt, (349) daraus sich die Parabel beschreiben läßt. (361)

431. Lehrs. Für jede Reihe von parallelen Sehnen MN: eine Linie der zweyten Ordnung 17 F gibt es einen Durchmesser, eine gerade Linie IO die sie alle halbirt.

Beww. Man ziehe auf die Sehnen eine Abscissenlinie senkrecht, so daß AP $= x$; PM und PN $= y$; so kann man (424) allemahl annehmen.

$$y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} \cdot y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0 \quad (\odot$$

In dieser Gleichung ist $-(\varepsilon x + \gamma) : \zeta =$ PM + PN(217) $=$ 2PL wenn ML oder $w = \frac{1}{2}$MN (Ar. V. 12) Man schaffe aus ihr das andere Glied weg, indem man $y = v - (\varepsilon x + \gamma) : 2\zeta$ setzet; (282) so kömmt

$$v^2 - (\varepsilon x + \gamma)^2 : 4\zeta^2 = 0 \quad (\mathbb{C}$$
$$+ (\delta x^2 + \beta x + \alpha) : \zeta$$

+

Hier hat v zweene entgegengesetzte sonst gleiche Werthe; oder es ist $y - PL = \pm v$ also

$$+v = PN - PL = LN;$$
$$-v = PM - PL = -LM$$

daß die beyden entgegengesetzten Werthe von w, LN; LM; sind. Nun sey $PL = z$ so ist $z = -(\varepsilon x + \gamma :) 2\zeta$ eine Gleichung für eine gerade Linie (340) in der also alle Puncte L liegen.

432. Zus. Sie schneidet die Abscissenlinie in O; daß $AO = -\gamma : \varepsilon$ (340) folglich $PO = -(\gamma + \varepsilon x) : \varepsilon$ und tang $O = \frac{PL}{PO} = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, welches die Lage des Durchmessers gegen die Abscissenlinie bestimmt.

433. Zus. Für den Winkel aber, unter welchen er die Sehnen halbirt, ist $\text{tang } L = \frac{PO}{LP} = \frac{2\zeta}{\varepsilon}$

434. Zus. Der Durchmesser schneidet die krumme Linie in I; wo der Ordinaten beyde Endpuncte M; N; in einen zusammengehen, oder die beyden Ordinaten PM; PN; zu einer werden, d. i. die Gleichung ⊙ 431; zwo gleiche Wurzeln hat, oder sich in $(y-IK)^2 = o$ verwandelt. Da wird also $2IK = -(\varepsilon x + \gamma) : \zeta$ und $IK^2 = (\delta x^2 + \beta x + \alpha) : \zeta$ folglich $\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)^2 = (\delta x^2 + \beta x + \alpha) : \zeta$; daraus erhält man

$$x^2 = 2.\frac{(2\beta\zeta-\varepsilon\gamma).x}{\varepsilon\varepsilon-4\delta\zeta} + \frac{4\alpha\zeta-\gamma\gamma}{\varepsilon\varepsilon-4\delta\zeta}$$

$$\text{und } x = \frac{2\beta\zeta-\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon-4\delta\zeta} \pm \frac{\sqrt{[(2\beta\zeta-\varepsilon\gamma)^2+(4\alpha\zeta-\gamma\gamma).(\varepsilon\varepsilon-4\delta\zeta)]}}{\varepsilon\varepsilon-4\delta\zeta}$$

welche beyden Werthe AH; AK sind. Folglich ist der Wehrt mit + beym Wurzelzeichen für AH; und mit − für AK gebraucht

$$KH = \frac{2\sqrt{((2\beta\zeta-\varepsilon\gamma)^2-(\varepsilon\varepsilon-4\delta\zeta).(\gamma\gamma-4\alpha\zeta))}}{\varepsilon\varepsilon-4\delta\zeta}$$

Man stelle sich durch G eine Parallele mit KH vor, die also auf IK senkrecht stehen, und von welcher ein Stück = HK zwischen IK und GH fallen wird, zwischen dieser Parallele und AH wird auf IK ein Stück = GH enthalten seyn, und folglich über ihr bis an I ein Stück = IK - GH liegen. Also ist $IG^2 = (IK-GH)^2 + KH^2$ Aber aus 431; $IK = -(\varepsilon AK + \gamma):2\zeta$ und $GH = -(\varepsilon AH + \gamma):2\zeta$ also $IK-GH = \varepsilon.(AH-AK):2\zeta$ oder $= \varepsilon.KH:2\zeta$ folglich $IG^2 = (\varepsilon\varepsilon + 4\zeta\zeta)\,KH^2 : 4\zeta\zeta$ für die Länge des Durchmessers.

435. Zus. Indessen können auch beyde Durchschnitte I; G; unmöglich werden, wofern KH unmöglich ist. So verhält es sich mit der Hyperbel kleinen Axe CO 14 F. (401) Auch kann ihre Entfernung unendlich werden, wenn $\varepsilon\varepsilon = 4\delta\zeta$ (Trig. 4. Erkl. 4. Z.) In diesem Falle giebt es dem Scheine nach einen

ein-

einzigen Durchschnitt, wie für die Axe der Parabel (354)

436. Aufg. Die Gleichung für andere Coordinaten Ap = t; pM = u; zu finden.

Aufl. Es sey für den Sinustotus = 1; sin MpH = μ; col MpH = ν; also y : u = μ; Pp : u = ν folglich y = μu und x = t + ν. u dieses in ⊙ 431 gesetzt gibt

$$\sigma) \; uu + \frac{((\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta)u}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta} + \frac{\delta tt + \beta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta} = o$$

437. Zus. Da hier wieder zweene Werthe von u oder zwo Ordinaten pM; pm; zu einer Abscisse gehören, so halbire l die Sehne Mn; und es sey (pM + pn) : 2 oder pl = ω = $-((\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta) : 2.(\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta)$ Man fälle auf die Abscissenlinie das Perpendikel lq = q; und heisse Aq = p so ist ω = q : μ und pq : ω = ν also t = p - $\nu\omega$ = p - νq : μ. Dieses in die nur gefundene Gleichung zwischen ω und t gesetzt gibt $(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)q + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)p + \gamma\mu + \nu\beta = o$ Also liegen wieder alle Puncte l in einer geraden Linie, oder es gibt für die Sehnen mn einen Durchmesser, welcher die Abscissenlinie in o schneidet, wo q = o oder Ao = $-(\gamma\mu + \nu\beta) : (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)$; Auch ist tang Aol = $((\mu\varepsilon + 2\nu\delta) : (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)$ Man setze μ : ν oder tang MpH = π; und dividire

den Ausdruck tang Aol im Divisor und im Dividendus mit ν; so kömmt.

$$\text{tang Aol} = (\pi\varepsilon + 2\delta) : (2\pi\zeta + \varepsilon)$$

438. Zus. Wenn also beyde Durchmesser einander in C schneiden, so ist o CO = Aol — AOL also in Trig. 19. S. 4 Z. statt y; T; t; hier tang oCO; tang Aol; tang AOL = $\varepsilon : 2\zeta$ (432) gesetzt; tang o CO = $(4\nu\delta\zeta - \nu\varepsilon\varepsilon) : (4\mu\zeta\zeta + 2\nu\delta\varepsilon + 2\mu\varepsilon\zeta + \varepsilon\varepsilon)$ oder = $(4\delta\zeta - \varepsilon\varepsilon) : (4\pi\zeta\zeta + 2\delta\varepsilon + 2\varepsilon\zeta + \pi\varepsilon\varepsilon)$ für den Winkel, unter dem beyde Durchmesser einander schneiden.

439. Zus. Der Winkel, unter welchem dieser neue Durchmesser seine Sehnen halbirt, ist Mlo = 2R - Mpo — Aol; also tang Mlo = — tang (Mpo + Aol) (Trig. 4. Erkl. 1. Zus.) Aber tang Mpo = $\mu : \nu$ (436) also wird aus Trig. 19. S. 3. Z. für das dortige y; t; hier tang Mpo; tang Aol; (437) gesetzt: und der Werth der Tangente der Summe verneint genommen:

$$\text{tang Mlo} = \frac{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}{\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta - 2\mu\mu\zeta - \nu\nu\varepsilon}$$ oder

$$= \frac{2\pi^2\zeta + 2\pi\varepsilon + 2\delta}{\pi^2\varepsilon + 2\pi\delta - 2\pi\zeta - \varepsilon}$$

440. Aufg. Den Punct C zu finden, wo beyde Durchmesser einander schneiden.

Aufl. Man lasse auf die Abscissenlinie das Perpendikel CD = h herab, und nenne AD = g; Weil sich nun C in beyden Durchmessern IG und ig be-

befindet, so ist in den Gleichungen für beyde Durchmesser g statt der Abscisse x; p; und h statt der Ordinate z; q; gesetzt.

I) $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = o$ (431) und

II) $2\mu\zeta \left| \begin{matrix} h + \mu\varepsilon \\ + \nu\varepsilon \end{matrix} \right| \begin{matrix} \Big\} g + \mu\gamma = o \\ + 2\nu\delta \Big\} + \nu\beta \end{matrix}$ (437)

Von II ziehe man I durch μ multiplicirt ab, die Gleichung, die herauskömmt, durchgängig mit ν dividirt gibt

III) $\varepsilon h + 2\delta g + \beta = o$

also wird aus III; I;

$$h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \beta}{\varepsilon}$$

daraus folgt $g = (2\beta\zeta - \gamma\varepsilon) : (\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)$
und $h = (2\gamma\delta - \beta\varepsilon) : (\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)$

Diese beyden Werthe von g; h; enthalten kein μ; ν; welches die Schiefe der Ordinaten Mp bestimmte. Sie bleiben also einerley, in was für einem Winkel man diese Ordinaten zieht, oder sie sind für eine andere Reihe schiefer Ordinaten eben das. Da nun diese beyden Linien zusammen den Punct C bestimmen, so bleibt der Punct C für alle Reihen schiefer Ordinaten einerley. Jede Reihe schiefer Ordinaten hat einen Durchmesser (437) und alle diese Durchmesser schneiden IG in einem und demselben Puncte C;

441. Zus. Ein Durchmesser ig, halbirt keine Sehne, die nicht mit den ihn zugehörigen Sehnen

MN, parallel geht. Eine andere Sehne MN; hat einen ihr zugehörigen Durchmesser IG, der sie in L halbirt, (431) sollte sie nun auch von i g halbirt werden, so müßte i g durch L gehen; aber er geht auch durch C; und so hätten i g; I G; zwo unterschiedene gerade Linien, zweene Puncte gemein.

442. Erkl. Der Punct C. in welchen alle Durchmessen einander schneiden, heißt der Mittelpunct.

443. Lehrs. Wenn der Durchmesser i g die krumme Linie in zween Puncten schneidet, (434) so liegt der Mittelpunct mitten zwischen ihnen.

Bew. Sehnen, die mit i g parallel gehen, werden von einem andern Durchmesser VC halbirt, (437) der also auch i g, als eine von ihnen halbirt, und das muß im Mittelpuncte geschehen (442)

444. Aufg. Die Lage des Durchmessers CV (443) oder den Winkel CVO zu finden.

Aufl. In (437) fand man den Winkel A o l, welchen ein Durchmesser mit AP machte, der die Ordinaten p M n halbirte, die unter dem Winkel M p O gegen AP geneigt waren. Will man also den Winkel AVC finden, den ein Durchmesser mit AP macht, dessen Ordinaten unter dem Winkel l o O gegen die Axe geneigt sind, so muß man nur in dem Ausdrucke tang A o l statt des Winkels MpO den gegenwärtigen Ordinatenwinkel gebrauchen; denn alles übrige in dem Ausdrucke der erwähnten

Tan-

Tangente, ist für beyderley Ordinaten eben dasselbe. Hier muß man aber bemerken, daß π die Tangente von MpO; also $-\pi$ die von ApM (Trig. 4. Erkl. 1. Z.) bedeutet. Heißt also tang Aol $= \varphi$ so muß man in dem Ausdrucke der tang pol; $= \varphi$ statt $-\pi$ d. i. $-\varphi$ statt π setzen. Also wird tang AVC $=$ $(-\varphi\varepsilon + 2\delta) : (-2\varphi\zeta + \varepsilon)$ Nun ist $\varphi =$ $(\pi\varepsilon + 2\delta) : (2\pi\zeta + \varepsilon)$ (437) dieses statt φ gesetzt giebt tang AVC $= -\pi$ oder AVC $=$ ApM folglich geht der Durchmesser CV mit den Ordinaten pM des Durchmessers ig parallel; oder: eine Linie durch den Mittelpunct mit den Ordinaten eines Durchmessers parallel gezogen, ist ein Durchmesser für Ordinaten, die mit dem vorigen Durchmesser parallel gehen.

445. Erkl. Diese beyden Durchmesser (444) heissen zusammengehörige (coniugatae.) Ihr Winkel ist der Winkel, den die Ordinaten mit ihrem Durchmesser machen.

446. Zus. Wenn der zu ig gehörige Durchmesser, die krumme Linie auch in zweenen Puncten schneidet, so ligt C ebenfalls mitten zwischen ihnen.

447. Lehrs. Eine Linie ik; die durch des Durchmessers Ende i; mit seinen Ordinaten parallel geht, hat weiter keinen Punct als i mit der krummen Linie gemein.

Bew. Schnitte sie die krumme Linie noch einmahl, so wäre sie eine Sehne, in der Reihe der

Sehnen, welche alle von dem Durchmesser halbirt werden. (437) Sie würde also selbst von ihm halbirt, und dieses müßte in i mo er sie schneidet, geschehen; also müßte sie die krumme Linie noch auf beyden Seiten von i, in gleichen Entfernungen davon schneiden, d. i. drey Puncte mit ihr gemein haben wieder (426).

448. Zus. Wenn man von i unter dem Durchmesser i g; einen Bogen der krummen Linie so klein man will i M nimmt, und die zu M gehörige Ordinate M n zieht; so giebt sie wegen der parallelen Lage mit i k; über dem Durchmesser einen Punct der krummen Linie n.; der auf eben der Seite von i k liegt, auf welcher sich M befindet; und wenn man gegentheils einen Punct über dem Durchmesser, n, so nahe man will bey i nmmt, und dessen Ordinate nM zieht, so giebt sie auf eben die Art einen Punct M der auf eben der Seite von i k liegt, auf welcher n lag. Man ziehe also eine willkührliche Ordinate Mn, so liegen alle Puncte des Bogens iM auf eben der Seite der Linie i k auf welcher alle Puncte des Bogens i n liegen, oder das ganze Stück der krummen Linie M i n liegt auf eine Seite der geraden i k.

449. Erkl. Wenn eine gerade Linie einen Punct mit einer krummen gemein hat, und beyde Bogen der krummen Linie von diesem Puncte an; iM, in; auf einer Seite der geraden Linie liegen, so sagt man sie sey eine Tangente der krummen; und i ist ein Berührungspunct.

450. Zus. Die Linie ik (447) berühret die krumme in i.

451. Anm. Wir können nicht für unmöglich erklären, daß die krumme Linie von der Tangente irgendwo wieder geschnitten werde, wie in H 18 F. Aber bey den Linien der zweyten Ordnung geht das nicht an. (447)

452. Zus. Wenn die Sehne M n mit einer parallelen Bewegung nach i zurückt, so gehen die Puncte M; n; immer näher zusammen, und werden endlich in i zu einem einzigen. Also kann man den Berührungspunct für einen doppelten Durchschnittspunkt ansehen; und die Linie der zweyten Ordnung hat deßwegen keinen Punct als i mit der Tangente gemein, weil sie mit keiner geraden Linie mehr als zween Puncte gemein haben kann, (426) und i für zween Puncte gilt. So ist I (434) ein Berührungspunct, wo M; N; zusammengehen.

453. Lehrs. Wenn die Abscissen il = w auf einem Durchmesser, welcher die krumme Linie in zween Puncten, i; g; schneidet, genommen werden, so ist die Gleichung zwischen ihnen und den Ordinaten ln = z; $z^2 = \varkappa w + \lambda w^2$.

Bew. Die Gleichung kann keine höhere Potenzen veränderlicher Grössen als die zweyte enthalten, (423) und weil die Ordinaten ln; lM; gleich aber entgegengesetzt sind, (437) so ist ihre Summe = o (224) und die erste Potenz von z fehlt in der Gleichung. Es ist aber z = o für w = o; und für

$w = ig$; also muß w für einen Werth von z nähmlich $z = o$; zweene Werthe haben können, folglich das Quadrat von w nebst der ersten Potenz in der Gleichung enthalten seyn; kein vollkommen beständiges Glied aber, das weder w noch z enthielte, kann nicht in der Gleichung seyn, denn diese beständige Grösse müßte $= o$ seyn, weil z und w zugleich o werden können, und sie also allein stehen bliebe.

454. Zus. $ig = -x : \lambda$

455. Zus. Giebt es nur einen Durchschnitt, so kann der andere nicht unmöglich seyn, (272) sondern er muß nur von dem ersten unendlich entfernt seyn. (435) Also ist $\lambda = o$ (454 und Trig. 4 Erkl. 4 Z.) und die Gleichung $z^2 = xw$;

456. Lehrs. Es giebt in jeder Linie der zweyten Ordnung Durchmesser, die die krumme Linie in einem, oder in zween Puncten schneiden.

Bew. Wenn ein Durchmesser die krumme Linie nicht schneidet; so muß er zwischen zwey Stücken von ihr liegen, wie CD 14 F. zwischen MAm; RBS; wenn man also Parallellinien mit ihm zieht, die dem Stücke MAm immer näher und näher kommen, so kömmt man auf eine, die einen Punct, z. E. A mit diesem Stücke gemein hat, das übrigens ganz auf einer Seite von ihr liegt, d. i. auf eine Tangente. (449) Parallelen mit ihr auf der Seite, wo MAm liegt, werden Sehnen, und haben einen Durchmesser,

(437) der durch den Berührungspunct gehen muß. (447; 452)

457. Zus. Für jede Linie der zweyten Ordnung läßt sich eine Gleichung wie 453. finden.

458. Aufg. Es ist eine Gleichung vom zweyten Grade, für schiefe Coordinaten AP; PM; 16 F. gegeben; man soll daraus eine für rechtwinklichte AP; PM; 17 F. finden.

Aufl. Man fälle 16 F. auf die Ordinaten das Perpendikel AR; so ist AP = AR. sin APM; PR = — AP. cos. APM = — AR. sin APM. cos APM und PM = RM — PR; also kann man in der gegebenen Gleichung statt AP; PM; ihre Werthe durch die neuen rechtwinklichten Coordinaten AR; RM; ausgedruckt setzen, welches eine Gleichung zwischen den letzten giebt. In dieser Gleichung nun können die Coordinaten AP; PM; 17 F. bedeuten.

459. Aufg. Aus jeder Gleichung des zweyten Grades eine wie 453 herzuleiten.

Aufl. Nachdem man sie auf die Gleichung zwischen AP; PM; 17 F. gebracht hat, (458) so mache man eine Gleichung für willkührliche schiefe Ordinaten Ap = t; pM = u (436). Man suche das t wo M und n zusammen gehen, wie (434); bekömmt es zweene mögliche Werthe, so hat man folgergestalt die Puncte i; und g; weil man für t = AK in die Gleichung (436) gesetzt, die Ordina-

te k i, und weil derselben Winkel i k A bekannt ist, auch die senkrechte Weite des Punctes i von A k, und den Ort, wo das Perpendikel von i auf Ak einschneidet, findet. So bekömmt man aus den beyden von i und g hergelassenen Perpendikeln und ihrer Entfernung; i g wie 1G (435) und die Lage der Linie io ist auch gegeben, sowohl als der Winkel i l M (437. 439) Aus einer gegebenen Gleichung zwischen den Coordinaten AP; PM; kann man aber allemahl eine andere zwischen il; lM; machen, wenn der Anfang der Abscissen i, und die Lage der neuen Abscissenlinie und ihrer Ordinaten gegeben sind. (427) Die Rechnung selbst ist zu weitläuftig, und man kann sich hier damit begnügen, daß man ihre Möglichkeit einsieht.

Würden die Werthe von den t für die Puncte i; g; unmöglich, so brauchte man statt i g den zugehörigen Durchmesser (446; 456).

460. Zus. Die Ordinate durch den Mittelpunct, für welche $w = -x : 2\lambda$ (454) ist $= \frac{1}{2}x . \sqrt{(-1:\lambda)}$ unmöglich, wofern nicht λ verneint ist.

461. Zus. $w = -\frac{x}{2\lambda} - Cl$; in die Gleichung (453) gesetzt, gibt $z^2 = \lambda . Cl^2 - \frac{x^2}{4\lambda}$

462. Zus. Diese Gleichungen (453; 461) haben, nachdem λ bejaht oder verneint ist, einerley Gestalt mit den Gleichungen für die Hyperbel (389; 402) und

und Ellipse (362; 368). Nur daß hier die Coordinaten nicht rechtwinklicht angenommen werden. Für die Parabel läßt sich die 461 so unmittelbar nicht brauchen, weil der Parabel Mittelpunct als unendlich entfernt angesehen werden müßte, (384) aber 453 erfodert für die Parabel nur $\lambda = o$; das ist den Durchmesser i g unendlich (455) wie die Axe (383) In der Parabel nähmlich werden wegen des unendlich entfernten Mittelpuncts, alle Durchmesser unter sich, und mit der Axe parallel seyn. (S. 12. S. 12. Z.)

463. Lehrs. In jeder Linie der zweyten Ordnung, giebt es einen Durchmesser, i g; 17 F. der seine Sehnen senkrecht halbirt.

Bew. Für diesen Fall ist die Tangente von M l o (439) unendlich; also $\pi\pi\varepsilon + 2\pi\delta - 2\pi\zeta - \varepsilon = o$ (Trig. 4. Erkl. 4. Z.) daraus wird (78) $\pi = \frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right)}$ Diese beyden Werthe von π müssen allemahl möglich seyn, weil das Quadrat unter dem Wurzelzeichen allemahl bejaht ist, und dazu eine bejahte 1 kömmt, folglich die Grösse unter dem Wurzelzeichen allemahl bejaht ist. Es giebt also allemahl zweene Ordinatenwinkel MpA die der Frage genug thun. Ist nähmlich i o ein Durchmesser, der die Ordinaten pn senkrecht halbirt, so halbirt sein zugehöriger CV die Ordinaten, die mit i o parallel gehen unter den

Win-

Winkel V C o (444) = p l o = 90 Gr. Wenn alſo einer der Winkel, für welche die Tangente π gefunden worden, M p P iſt, ſo iſt der andere C o O = 2R — C o p = 2R — (R - M p P) Nun iſt tang (2R - (R - M p P)) = — tang (R - M p P) (Trig. 4. Erkl. 1. Z.) = — Cot M p P (Trig. 5. Erkl.) alſo tang C o O = — Cot M p P iſt alſo eines von beyden Zeichen vor der Wurzel gebraucht

$$\text{tang M p P} = \frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right)}$$

$$\text{ſo iſt tang C o O} = -1 : \left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right]}\right)$$

(Trig. 5. Erkl. 1. Z.)

$$\text{Es iſt aber } \left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right]}\right) \cdot \left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \mp \sqrt{\left[\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right]}\right) = -1 \text{ (Ar. II. 5.)}$$

$$= \text{tang C o O} \cdot \left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right]}\right)$$

$$\text{alſo iſt tang C o O} = \frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \mp \sqrt{\left[\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right]}$$

oder der eine Werth von π iſt die Tangente für M p H; der andere für C o O.

464. Lehrſ. Es giebt keine andere Linien der zweyten Ordnung, als die Parabel (349) Ellipſe, (362) Hyperbel. (389)

Bew.

Bew. Jede Linie der zweyten Ordnung hat einen Durchmesser, der seine Sehnen senkrecht halbirt. (463) Die Gleichung zwischen Abscissen auf diesem Durchmesser genommen, und den zugehörigen halben Sehnen, (457) ist allemahl mit einer von den drey Gleichungen 349; 362; 389; einerley (462) und der Ordinatenwinkel ein rechter, welches bey (462) noch fehlte. Also ist eine Linie von der zweyten Ordnung allemahl eine der genannten.

465. Aufg. Aus der Gleichung (419) was auch der Ordinatenwinkel ist, zu beurtheilen, ob sie zu einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel gehöret.

Aufl. I. Aus ihr wird

$$y = \frac{-(\varepsilon x + \gamma) \pm \sqrt{((\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta.(\delta x^2 + \beta x + \alpha))}}{2\zeta}$$

II. Die Grösse unter den Wurzelzeichen, die ich zuennen will, läßt sich so ausdrucken: $y = (\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + \varphi x + \varrho$ wo φ; ϱ; aus ε; γ; δ; β; α; ζ; durch gehörige Rechnung müssen bestimmt werden.

III. Aus der Lehe vom Unendlichen nehme ich an, daß wenn man x unendlich sezt, $z = (\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2$ werden, und das Uebrige in Vergleichung dieses Theiles verschwinden wird.

IIII. Ist also $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta$ etwas bejahtes, so hat die krumme Linie mögliche Ordinaten für bejahte und verneinte unendliche x (31) d. i. wenn man durch A eine Linie mit den Ordinaten parallel zieht, so er-

erstreckt sie sich auf beyden Seiten dieser Linie ins Unendliche. Sie ist also keine Ellipse (375) Ferner giebt es für jedes x; zwo oder kein y; also hat die krumme Linie vier unendliche Schenckel, zweene für die bejahten Abscissen und eben soviel für die verneinte. Die Parabel hat deren nur zweene, (355; 356) die krumme Linie muß also eine Hyperbel seyn. (409)

V. Ist $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta$ etwas verneintes, so giebt es keine Ordinaten für unendliche bejahte oder verneinte Abscissen; die krumme Linie hat also keine unendlichen Schenkel; Sie ist eine Ellipse.

VI. Hieraus erhellet schon, daß $\varepsilon\varepsilon = 4\zeta\delta$ eine Parabel geben wird. Alsdenn nähmlich ist überhaupt $z = \Phi x + \varrho$; Ist Φ bejaht, so sind für jedes unendliche bejahte x; zwo Ordinaten möglich, aber für unendliche verneinte x die Ordinaten unmöglich; Ist Φ verneint, so giebt es zwo mögliche Ordinaten für jede verneinte unendliche Abscisse, und für jede bejahte unmögliche Abscisse sind die Ordinaten unmöglich. Es mag also Φ bejaht oder verneint seyn, so hat die krumme Linie zweene, und nur zweene, unendliche Schenkel, als das Merkmahl der Parabel.

VII. Es erhellt, daß diese Merkmahle jeder Gattung der Linien der zweyten Ordnung auf den Coefficienten der Glieder der Gleichung beruhen, wo xy; xx; yy; vorhanden sind.

VIII.

VIII. Fehlt x y; oder ist $\varepsilon = 0$; so müssen ζ; δ; für die Hyperbel verschiedene Zeichen (IIII) für die Ellipse einerley (V) haben, für die Parabel (VI) muß eines von beyden $= 0$ seyn; beydes zugleich kann nicht wegfallen, wenn die Gleichung vom zweyten Grade bleiben soll.

466. Anm. Meine Absicht ist nur gewesen, die ersten Begriffe von den Linien der zweyten Ordnung zu geben. Ich kann mich also in eine ausführliche Untersuchung ihrer Eigenschaften, die besondere Bücher ausfüllen, nicht einlassen. Man hat ausser dem Apollonius, u. a. die sie als Kegelschnitte betrachtet haben, von ihnen geschrieben haben, die häufige Arbeiten der Neuern, seitdem Cartesius die Eigenschaften der krummen Linien aus den Gleichungen analytisch herzuleiten angewiesen hat. Man s. Io. de Witt Elementa curuarum, unter den Commentariis über Cartesens Geometrie, de l'Hôpital, Sections coniques; Euler Introd. in Analys. inf. L. II. C. V. Hubens Vers. einer analyt. Abh. von den Kegelschnitten, u. a. m.

Exempel anderer krummen Linien, und allgemeine Lehren von ihnen.

467. Erkl. Eine algebraische krumme Linie heißt, für die sich eine algebraische Gleichung (323) geben läßt. Sie ist von der zweyten, dritten, vierten u. s. w. Ordnung, nachdem die Gleichung auf den zweyten, dritten, vierten u. s. w. Grad steigt. Die Gleichung heißt aber vom Grade n; Wenn die höchste Potenz von x; oder die von y;

oder

oder alle beyde n erreichen, oder wenn Prodncte aus x in y enthalten sind, in denen die Abmessungen von x und y zusammengerechnet n ausmachen, aber nicht überschreiten. Die gerade Linie selbst gehört zur ersten Ordnung; daher man auch mit Newton (enumerat. linear. tert. ord.) krumme Linien von dem ersten, zweyten, dritten, u. s. lw. Geschlechte nennen könnte, wo die Gleichung auf den zweyten, dritten, vierten u. s. w. Grad steigt.

So ist die Gleichung (412) vom zweyten Grade, weil p und q zusammen die zweyte Abmessung ausmachen. Wenn die Gleichung zwischen AP und PM 16 F. ein Glied wie $x^m . y^n$ enthält; so kömmt, aus 419 VI. VII. in der Potenz m von x; die Potenz m von t und von u; und in der Potenz n von y die Potenz n von t und von u vor, wenn man statt x; y; ihre Werthe durch t und u ausgedrückt setzt. Also wird das Glied das $x^m y^n$ enthielte, in der Gleichung zwischen t und u solche geben, welche die Potenzen m † n; von t und von u enthalten. Es kann vielleicht Fälle geben, da die Glieder der Gleichung zwischen t und u welche die Potenz m † n von t und von u enthalten, einander auch aufheben, aber dieses kömmt auf die Lage der neuen Abscissenlinie BQ und den Anfang der neuen Abscissen B an; und also werden sich dergleichen Abscissen allemahl so nehmen lassen, daß sich die Glieder, welche die Potenzen m † n von u und t; enthalten, nicht aufheben. Hieraus wird begreiflich, warum man eine Gleichung, die $x^m . y^n$ enthält, ansehen kann, als wäre sie vom Grade m † n.

468. Anm. Wie weitläuftig die allgemeine Abhandlung solcher krummen Linien werden müsse, ist schon aus der zweyten Ordnung zu ersehen. Ich muß daher auf besondere Schriften davon verweisen, dergleichen Euler ; Introd. in Analyf. inf. L II. und Cramer Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques sind. Hier kann ich nur noch an einigen einzelnen Proben zeigen, wie man die Gestalten der krummen Linien aus ihren Gleichungen herleitet, und die Gleichungen aus angegebenen Umständen findet.

469. Erkl. Auf des Halbkreises AOB Durchmesser AB = a stehe BC senkrecht. Man nehme BH nach Gefallen und ziehe AH die den Kreis in I schneidet. Auf ihr nehme man AM = HI; so ist M in der Cissois des Diokles. 19 F.

470. Aufg. Die Gleichung für die Cissois zwischen AP = x; PM = y zu finden.

Auflf. BH = ay : x (G. 25 S.) und HI. HA = BH^2 : (Trig. 16 S. Zuf.) aber HA = a. AM : x (G. 25 S.) folglich weil HI = AM; BH^2 = á. AM^2 : x d. i. $\frac{aayy}{xx} = \frac{a.(xx+yy)}{x}$ also

$ayy = x^3 + xy^2$ und $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$

471. Zuf. Die Cissoide ist eine Linie von der dritten Ordnung (467) und der Durchmesser AB als die Abscissenlinie theilet sie in zwo ähnliche Hälften. Wie auch daraus erhellt, weil man eben die Verzeichnung mit dem Halbkreise auf des Durchmessers anderer Seite machen kann.

472. Zus. Eine verneinte Abscisse oder eine bejahte die grösser als a wäre; gäbe der Ordinate Quadrat verneint. Also ist nichts von der Cissoide unter A noch über B.

473. Zus. y ist = o für x = o und = ∞ für x = a. Auch wächst es mit x weil der Dividendus wächst, und der Divisor, da x beständig kleiner als a bleibt (472) immer abnimmt. Die krumme Linie geht daher mit dem Schenkel AMN ohne Ende fort weiter von AB weg, und näher nach BC erreicht aber BC nie, d. i. BC ist ihre Asymptote. (408)

474. Aufg. Die Gestalt der krummen Linie zu finden, deren Gleichung $y = a + \sqrt[3]{a \cdot (a-x)^2}$; wo AP = x; PM = y; 20 F

Aufl. Die Gleichung einfacher zu machen, sey a-x = u; also wenn AB = a; BP = u; Weil jede Cubikwurzel nur einen möglichen Werth hat, (237) so giebt es nur ein y für jedes u. Weil gleiche entgegengesetzte u einerley Quadrat geben, so ist y für + und für − u einerley, also theilet die Ordinate durch B die krumme Linie in zwo ähnliche Hälften, das kleinste y ist = a = BD für u = o; sonst wachsen die y mit u ohne Ende. Jedem bejahten u gehört ein Punct der krummen Linie rechter Hand und jedem verneinten linker Hand BD zu; und die krumme Linie geht mit zween unendlichen Schenkeln DM, DG von D aus. Jeder Schenkel gehört nur für eine Art von Abscissen, und liegt also ganz

an

an einer Seite von BD; daher schneidet er BD nicht, und BD ist eine Tangente (449). Für u = — a = BA ist AC = 2 a; die krumme Linie kann von einer geraden in drey Puncten geschnitten werden, wie in E; F; G; die Ursache ist, weil die Gleichung rational gemacht; $(y \cdot a)^3 = au^2$ auf den dritten Grad steiget.

475. Aufg. F; f; 12 Fig. sind ein Paar gegebene Puncte; M ist ein Punct in einer krummen Linie, und FM + fm = a; Man soll diese krumme Linie finden.

Aufl. Man halbire Ff in C; fälle von M ein Perpendikel MP auf Ff: und nenne CF = Cf = e; CP = u; MP = y so ist $FM^2 = (e-u)^2 + y^2$ und $fM^2 = (u + e)^2 + y^2$ also $\sqrt{((e-u)^2 + y^2)} = a - \sqrt{((e+u)^2 + y^2)}$. Wenn man auf beyden Seiten quadrirt, und was sich aufhebet wegläßt, so kömmt

$$2a\sqrt{((e+u)^2 + y^2)} = a^2 + 4eu. \quad (P)$$

dieses wieder quadrirt, und die Gleichung geordnet, giebt

$$yy = \frac{aa - 4ee}{a} - \frac{aa - 4ee}{aa}. uu \quad (Q)$$

Dieses ist aber (368) die Gleichung für eine Ellipse, deren Mittelpunct C; die grose Axe a; und die kleine $\sqrt{(aa - 4ee)}$. Also ist die gesuchte Linie eine Ellipse, und die Eigenschaft (378) kömmt der Ellipse allein zu.

476. Zus. Hätte man angenommen fM—FM = a; also — √ ((e — u)² + y²) = a — √ ((e + y²) und übrigens eben so verfahren, so wäre man ebenfalls auf P und folglich auf Q gekommen. Nun ist, wie aus Q erhellt, man mag 476 oder 475 annehmen; für y = o; u = ½ a; also fM = ½ a + e und FM = ± e ∓ ½ a die obern oder untern Zeichen gebraucht, nachdem e ≷ oder ≶ ½ a, weil FM bejaht seyn soll. Soll nun in allen Fällen, also auch für y = o; fM + FM = a seyn; so muß man in dem dafür gehörigen Werthe von FM die untern Zeichen gebrauchen, also annehmen e ≶ ½ a; welches für 475 gilt. Soll aber in allen Fällen, also auch für y = o; fM — FM = a seyn, so muß man in dem dafür gehörigen Werthe von FM; die obern Zeichen brauchen, also e ≷ ½ a annehmen; für (476). In der Gleichung Q ist also aa — 4ee eine bejahte Grösse, wenn sie aus (476) hergeleitet worden ist. Daher gehört diese Gleichung in beyden Fällen nicht zu einer Linie. Im zweyten gehört sie zur Hyperbel (402).

476. Anm. Ich rechne die Abscissen von C weil dieser Punct gegen beyde gegeben F; f; einerley Lage hat. Hätte ich sie anders woher z. E. von F oder f gerechnet, so wäre die Gleichung nicht so einfach geworden. Will man das Gesuchte auf eine so einfache Art, als sich thun läßt, bestimmen, so muß man es durch solche Dinge zu bestimmen bemüht seyn, die so viel als möglich einerley Verhalten gegen die gegebenen Dinge haben.

477. Erkl. Wenn von einer geraden Linie MQC 21 Fig. die beständig durch C gehet, ein gegebener Punct sich beständig in der gegebenen geraden Linie BF befindet, so beschreibt ein anderer gegebener Punct M, dieser geraden Linie die Muschellinie. (conchoides Nicomedis).

478. Zus. Es sey CE auf BF senkrecht, und M, N seyn zween Puncte der Muschellinie, von denen die Perpendikel MR; NT, auf BF fallen, ferner sey ECN > ECM so ist NST > MQR; aber NS = MQ; also NT > MR gleichwohl kann nie das Stück QM der durch C gehenden Linie auf BF fallen; also kommen, wenn EQ wächst, die Puncte M, N, der krummen Linie, der Linie BF immer näher; ohne daß einer je in sie fiele, oder BF ist der Muschellinie Asymptote.

479. Aufg. Die Gleichung für die Muschellinie zu finden.

Auf. Es sey CE = b; QM = a; MR = EP = x PM = ER = y; so ist CE: EQ = CP: PM oder b: EQ = b + x: y aber EQ = y − QR und QR = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ also b: y − $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ b + x: y oder by = by + xy − (b + x) $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ oder (b + x) $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ = xy also $(b^2 + 2bx + x^2) \cdot (a^2 - x^2) = x^2 y^2$ oder $x^4 + 2bx^3 + y^2 x^2 - 2a^2 bx - a^2 b^2 = 0$

$+b^2$

$-a^2$

480.

480. Zus. Aus der Gleichung wie sie noch xxyy auf einer Seite allein stehen hatte; wird

$$y^2 = \frac{a^2 b^2}{x^2} + \frac{2 a^2 b}{x} + a^2 - b^2 - 2bx - x^2$$

wo jedem x zwo gleiche und entgegengesetzte y zugehören, daß also CEA die Muschellinie in ähnliche Hälften theilet. Ferner wird $y = \infty$ für $x = 0$; wegen der Asymptote. (478)

481. Zus Aus 479; wird $y = \frac{(b+x).\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$

Es gibt also keine Ordinate für $x^2 > a^2$: Dieses erhellt daraus; QM 21 fig. ist entweder die Hypotenuse des Dreyecks MQR; also grösser als die Ordinate, oder wenn QM in die Lage EA kömmt, ist es die Ordinate selbst.

Aber es giebt Ordinaten für verneinte x; Man kann nähmlich $Q\mu = a$ auf der andern Seite der Asymptote nehmen, so entsteht der Theil der krummen Linie wie $\lambda \alpha \mu$; Ein Perpendikel von einem solchen Puncte μ, auf die Asymptote ist nie grösser als $Q\mu = a$; also gehört auch keine Ordinate, und kein Punct der krummen Linie zu einer verneinten Abscisse die grösser als $-a$ ist. Es mag nähmlich die bejahte Abscisse grösser als $+a$ oder die verneinte grösse als $-a$ seyn, so ist beydemahl $x^2 > a^2$

Nimmt man also $EA = +a$; $E\alpha = -\alpha$; so geht die krumme Linie durch A und α.

482. Zus. Soll der Pol C ein Punct der krummen Linie seyn, so ist für ihn $x = -b$;

Ist also $b \leqq a$; so ist C kein Punct der krummen Linie, wie in 481 aus der Gleichung und Construction gewiesen worden. In diesem ersten Falle 21. fig. wird die Conchoide von CE zweymahl, einmahl in A und einmahl in α geschnitten.

483. Zus. Ist aber $b \leqq a$ 22 fig. so geht die krumme Linie auch durch C; und es gibt in diesem Zweyten Falle einen Knoten $CD\alpha\delta C$ nähmlich für jedes verneinte x das grösser als $= b$; und kleiner als $-a$ ist, giebt es aus (481) zwey gleiche entgegengesetzte y, wegen des doppelten Zeichens der Wurzelgrösse. Dieses leichter zu übersehen, setze man $x = -u$ so wird in 481; $y = \frac{b-u}{-u}\sqrt{a^2-u^2}$)

$= \left(\frac{1-b}{u}\right).\sqrt{(a^2-u^2)}$ wo für Abscissen die sich zwischen C und α (22 f.) endigen, $u \leqq b$ aber $\leqq a$ ist, also $\frac{1-b}{u}$ bejaht und der Werth von y bejaht und der Wehrt von y bejaht oder verneint nach dem die Wurzelgrösse genommen wird.

Für $u \leqq a$ wird y unmöglich; aber $= \circ$ für $u = b$ oder $= a$;

484. Zus. Für jedes $u \leqq a$ giebt es zwey gleiche entgegengesetzte y; was auch a u. b für eine Ver-

hältniß haben. Also zieht sich die krumme Linie von ∞ mit zween gleichen und ähnlichen Scherkeln auf beyden Seiten von CA unten an BF hin. Sie sind ∞ μ; ∝ λ; 21 fig. ∝ δC μ; ∝ DC λ; 22 f.

485. Zus. In 481. ist $y = \left(\frac{b}{x} + 1\right) . \sqrt{(a^2 - x^2)}$ Wenn nun x kleiner als a ist, und abnimmt, so nimmt $\frac{b}{x}$, auch $a^2 - x^2$ zu; daher wächst y wenn x abnimmt, oder jedem kleinern positiven x gehört ein grössers y zu. Weil nun $\frac{b}{x}$ immer grösser wird, je kleiner x wird, und x kleiner als jede Grösse die sich angeben läßt werden oder bis auf nichts abnehmen kann, so kann $\frac{b}{x}$ und folglich y über alle Gränzen wachsen und man sagt, wie in Trig. 4. Erkl. 4. Zus. für $x = 0$ werde y unendlich, wie die Asymptote erfodert. (478)

486. Zus. Wenn die Abscisse verneint ist, so muß (483) allemahl $u \lesseqgtr a$ seyn; ist auch zugleich $u \lesseqgtr b$, so ist $\frac{1 - b}{u}$ eine verneinte Grösse die immer eine grössere verneinte Grösse wird, jemehr u abnimmt, und eben so alle Gränzen übersteigt wie $\frac{b}{x}$ in 485; also wird auch $y = o$ wenn die verneinte Abscisse $= o$ wird.

487. Zus. Die obern Schenkel AM, AL; und die untern (484) ziehen sich alle an BF so hin daß sie für grössere y ihr immer näher und näher kommen, und so nahe kommen als man nur will, wenn man y über alle Gränzen wachsen läßt. Dieses drückt man so aus: Die Schenkel erreichen BF als ihrer aller Asymptote wenn y unendlich wird.

488. Zus. Ein dritter Fall zu 482; 483; ist wenn $b = a$; also in 481; $y = \frac{(a+x).\sqrt{(aa-xx)}.}{x}$

Des Knotens Länge $C\alpha = a - b$ (22 f) wird hier $= 0$; oder die Puncte α, C, 22 f. gehen in einen αC 23 f. Es ist nähmlich jetzo $y = 0$; 1) für $x = -a$ wegen des Factors $a + x$; 2) für $x = \pm a$ wegen des Factors $\sqrt{(aa - xx)}$ also zweymahl für $x = -a$; daß in der 23 f. das Ende der Linie $x = -a$; zweene Puncte α u. C vorstellt. In der 22 fig. gehn die beyden Schenkel $\alpha\delta C\mu$; $\alpha DC\lambda$ jener nach F, dieser nach B; zu beyde durch C; in der 23 f. aber gehen die Bogen $\alpha\delta C$; αDC; der 22. f. in einen Punct zusammen der α und C zugleich ist.

489. Zus. Eine Linie $G\gamma Kk$ 22 Fig. die mit $A\alpha$ parallel und näher gezogen wird, als die Hälfte von $D\delta$ des Knotens größter Breite beträgt, schneidet die krumme Linie in vier Puncten G; γ; K, k,; Es gibt nähmlich für dieser Linie Abstand $Ee = y$; vier Werthe von x; nähmlich eG; eγ; eK; ek;

vermöge der Gleichung (479) Für grössere y als $\frac{1}{2}$ Dδ, müssen also von den vier Werthen, die x für jedes y haben sollte zweene unmöglich werden, und nur zweene möglich bleiben, wie die beyden RM; Rμ für x = ER 22 Fig; In der 21 Fig. müssen allezeit zweene Werthe von x für jeden Werth von y unmöglich seyn; und eben so in der 23 Fig; den Fall y = o ausgenommen; da es vier mögliche Werthe geben muß; einen x = a; und drey x = -a Nähmlich in der 22 Fig. gibt es für y = o auch vier mögliche Werthe x = a; x = — a; und zweene jeden x = — b; weil in der 22 Fig. in dem Puncte C einmahl + y = o; und denn — y = o wird, oder x = — b einmahl als die Abscisse des Endpunctes vom Bogen αδC; und denn als die des Endpunctes vom Bogen αDC betrachtet wird. Daher ist EC in der 22 Fig. als ein doppeltes x und EC = Eα in der 23 Fig. als ein dreyfaches anzusehen, oder ACα schneidet die krumme Linie in beyden Figuren viermahl; in der 22 Fig; in A, in C zweymahl (nähmlich den Schenkel αδCμF und den Schenkel αDλB;) und in α; der Punct, durch den zweene Schenkel der krummen Linie gehen wird als ein doppelter angesehen In der 23. Fig. kömmt zu dem doppelten Durchschnitte in C auch der in α, daß also da für x = — a drey Durchschnitte geschehen, und es befindet sich da ein dreyfacher Punct. Diese Schlüsse gibt die Betrachtung der Figur, und aus der Betrachtung der Gleichung läßt sich eben das leicht darthun: Wenn

$y^2 = o$

$y^2 = o$ so ist aus (479) $\frac{(b+x)^2 . (aa-xx)^2}{xx} = o.$

Weil nun x nicht ohne Ende wachsen darf (481) so kann man nicht darauf fallen, etwa dadurch daß x im Divisor unendlich gesetzt würde den Quotienten verschwindend zu machen, welches auch deßwegen nicht angeht, weil mit x auch der Dividendus wächst und also gegen den Divisor nicht verschwindet. Also muß der Dividendus = o seyn. Das kann nur bey folgenden drey Werthen von x geschehen: $x = -b$; $= a$; $= -a$; Soll nähmlich der Dividendus als eine Gleichung betrachtet werden, so entsteht er aus folgenden Wurzelgleichungen $(x - b)$. $(x - b)$. $(x + a)$. $(x - a)$ und die biquadratische Gleichung, die herauskömmt, hat vier Wurzeln, zwo jede $= b$; eine $= +a$; eine $= -a$; den beyden ersten gehören im 2 und 3 Falle mögliche Ordinaten zu; oder es gibt für sie Puncte der krummen Linie (482; 489) aber nicht im ersten Falle (482) daher ist im 1 Falle C kein Durchschnitt der Linie A ∝ C mit der krummen Linie.

Cramer; Introd. à l'Analyse des limes courbes algebriques art. 174. Ex. IIII. p. 449. hat sich hier geirrt, indem er den Punct C 21 fig. als einen einzelnen zur Conchoide gehörigen Punct, (punctum coniugatum) ansieht. Es giebt dergleichen Puncte bey krummen Linien, die mit dem übrigen Zuge der krummen Linie nirgends zusammen langen und doch vermöge der Gleichung dazu gehören; aber C

21 fig. ist nicht von der Art, denn ∝ ist der Punct der Conchoide der am weitesten unter der Asymptote liegt. (481) Cramer ist dadurch verleitet worden, daß er geglaubt, für $x = -b$ werde allemahl $y = 0$: Aber wenn $x^2 \& a^2$; wird $b + x = 0$, in etwas Unmögliches multiplicirt, und kann daher doch ein unmögliches Product geben; oder $\frac{y}{b+x}$ ist für $x^2 \& a^2$ allemahl unmöglich, also auch in 482; für $x = -b$

490. Zus. Wenn $b = 0$ so fällt C in BF und alsdenn wird die krumme Linie ein Kreis vom Halbmesser $= a$; und BF sein Durchmesser; denn daß BF eine Asymptote war, setzte zum voraus, C liege auser BF (478). In diesem Falle wird nähmlich in

$$(479)\ \frac{y = x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

wie sich für den Kreis gebühret.

491. Erkl. I. Zu jeder Abscisse x; gehört eine oder mehrere Ordinaten y. Im ersten Falle hat die krumme Linie nur einen Schenkel im andern mehrere. Man sehe nähmlich x als eine gegebene Grösse an, so wird y die Wurzel einer bestimmten Gleichung, und so viel es solche Wurzeln giebt, so viel giebt es unterschiedene Ausdrückungen für y, durch x und die beständigen Grössen. In jeder solchen Ausdrückung setze man x nun wieder verän-

änderlich, so giebt sie die Reihe von y die einem gewissen Schenkel zugehören.

So geben die beyden Wehrte mit entgegengesetzten Zeichen (351;) die beyden Schenkel der Parabel auf beyden Seiten der Axe.

II. Zuweilen nennt man auch unterschiedene Schenkel, die nach (I) einerley wären, nur daß für den einen x bejaht, für den andern verneint genommen wird.

So giebt in (402) $y = \pm c\sqrt{.\left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right)}$ nur zweene Schenkel der Hyperbel, einen für das obere, den andern für das untere Zeichen. Den ersten machte zusammen AMμ und BR 14 fig. aus. Man pflegt aber beyde als unterschiedene anzusehn da dem letztern — u wie dem ersten + u zugehört.

III. Nachdem man also eine Gleichung oder die andere für eine krumme Linie annimmt, nachdem können Puncte der krummen Linie zu einem oder zu mehrern Schenkeln gerechnet werden.

Die Gleichung (412) gäbe nach (I) nur einen Schenkel der Hyperbel, oder nach II; nur zweene; μMAm für das bejahte p, und RBS für das verneinte.

IIII. Man zählt also oft die Schenkel wie die Rechnung sie giebt, anders als wie die Figur sie anzeigt.

Wie

Wie man sie aber nach der letzten Art zählen sollte, da man etwa jeden Schenkel von einen gewissen merkwürdigen Puncte (wie die vier Schenkel der Hyperbel von ihren Scheiteln an) rechnete, davon lässt sich überhaupt nichts bestimmen, zumahl bey krummen Linien die nicht durch Durchmesser in ähnliche Theile getheilt werden. Es lässt sich auch immer eine Gleichung für die krumme Linie angeben, die die Schenkel eben so zählt wie man sie nach der Figur absondert, davon bey II; ein Exempel ist.

Man brauche in der Gleichung für die Conchoide (481; 483) die Wurzelgrösse mit dem Zeichen +; so ist die Ordinate, für eine bejahte Abscisse in (481) allemahl bejaht, und indem x von a bis o abnimmt; entsteht der Schenkel M G A 22 fig. Nimmt nun wieder eine verneinte Abscisse von o bis — b zu,

das ist wächst in 483; u von o bis b, so ist $1 - \frac{b}{u}$

so lange verneint und nimmt von verneinten unendlichen bis o ab, aber $\sqrt{(a^2 - u^2)}$ wird noch wie vorhin bejaht gesetzt; also ist y verneint und das giebt den Bogen λ C; Nimmt noch ferner u von b bis a zu, so wird $1 - \frac{b}{u}$ also auch y bejaht, und

das giebt den Bogen C D α; also giebt die Wurzelgrösse mit den Zeichen +, für verneinte Abscissen den Schenkel λ C D α und mit dem Zeichen — den Schenkel μ C δ α eben wie solche in 484 angegeben worden.

V. Wenn

V. Wenn von den Wurzeln (I) einige unmögliche sind, so hat die krumme Linie nur so viel Schenkel für jede Abscisse, so viel für diese Abscisse Wurzeln möglich sind.

So hat die 20 fig. (474) nur einen Schenkel für bejahte und nach (II) einen für verneinte Abscissen. Die übrigen beyden, kann man als unmöglich ansehen.

VI. Die Betrachtung der Schenkel kömmt besonders vor, wenn sie sich ins unendliche erstrecken, an Asymptoten hinziehen u. s. w.

492. Aufg. Die krumme Linie 16 F. sey von der Ordnung n; Man fragt, in wieviel Puncten aufs höchste sie von einer gegebenen geraden Linie geschnitten werden kann.

Aufl. PMN sey die gegebene gerade Linie; Man stelle sich eine Reihe Ordinaten vor, die mit ihr parallel gehen, und suche die Gleichung der krummen Linie für dieselben, und die Abscissen AP auf einer willkührlichen Abscissenlinie. In dieser Gleichung kann vermöge der Voraussetzung keine höhere Poteuz von y als n enthalten seyn. Also kann die Abscisse AP nicht mehr als n Ordinaten haben; folglich keine gerade Linie die krumme in mehr als n Puncten schneiden.

493. Zus. In einer Gleichung vom Grade n kann eine von beyden Coordinaten auf weniger Abmessungen steigen, wie (472;) ja vielleicht keine im höch-

höchsten Grade in ihr seyn (467; 412). Also schneidet nicht jede gerade Linie die krumme in n Puncten, sondern n ist nur die größte Menge von Puncten, in denen die krumme von der geraden geschnitten werden kann. Von dieser größten Menge können Durchschnitte unmöglich werden, (490) oder sich unendlich entfernen; (455) oder in einen Punct zusammengehen. (452; 490;) Das letztere gibt vielfache Puncte (puncta multiplicia) (489; 490;) da nähmlich ein Punct zugleich zu verschiedenen Schenkeln einer krummen Linie gehört.

494. Anm. Man kann zeigen, daß zwo Linien, eine von der Ordnung m; die andere von der Ordnung n; einander in nicht mehr als in m. n Puncten schneiden können. Cramer §. 46. Euler Mem. de l'Ac. de Prusse 1748. p. 234. Man setze, ihre Gleichungen seyn auf eine gemeinschaftliche Abscissenlinie AR 24 F. und einerley Coordinatenwinkel gebracht, da PM der einen Ordinate, und PN der andern ihre ist. Im Durchschnitte O haben sie alsdenn eine Abscisse AQ; und Ordinate OQ. Schafft man also aus ihren Gleichungen die Ordinate weg, und macht eine bestimmte, die nur die Abscisse enthält, (199) so steigt die Abscisse in ihr auf soviel Abmessungen soviel Durchschnitte es geben kann. So schneiden zwo Linien der zweyten Ordnung einander nur in 4 Puncten, wie aus 201 mit 419 verglichen erhellt; womit 429 übereinstimmt.

495. Aufg. Die Zahl von Puncten zu finden, die eine Linie von der Ordnung n bestimmen; wie die von der zweyten durch fünf Puncte bestimmt wird: (427)

Aufl.

Anst. Ihre allgemeine Gleichung enthält

I) alle Potenzen von y von der nten an bis auf o;

II) x mit allen Potenzen von y, von der n-1 an bis auf o multiplicirt.

III) xx mit allen Potenzen von y von der n-2 a bis auf o multiplicirt.

IIII) Und überhaupt x^m mit allen Potenzen von y; von n-m an bis auf o multiplicirt; da m alle Werthe von o bis n haben kann.

V) Also kommen in die Gleichung wegen; n

I; n + 1 Glieder
II; n
III; n-1

Für diese drey Sätze war m = ; o; 1; 2; läßt man also m (IIII) die folgenden grössern Werthe bekommen, so giebt

m = 3; 4; 5; . . . n

Glieder; n-2; n-3; n-4; . . 1

Die Menge aller Glieder zusammen ist also die Summe der absteigenden arithmetischen Reihe, deren erstes Glied n + 1, der Unterschied — 1; das letzte 1 ist, oder der aufsteigenden, deren erstes Glied 1; der Unterschied 1; das letzte n + 1 ist.

Sie ist also $\frac{(n+2).(n+1)}{2}$ (86). Nun kann allemahl ein Glied in der Gleichung, 1 zum Coefficienten haben, (192. III) also giebt es nur noch

$\frac{(n+2).(n+1)}{2} - 1$ oder $\frac{(n+3).n}{2}$ Coefficienten zu bestimmen, welches die Zahl der Puncte ist, durch die eine solche Linie bestimmt wird.

Für $n = 2$ kömmt $\frac{4.3}{2} - 1 = 5$; für $n = 3$; $\frac{6.3}{2} = 9$ oder eine Linie der dritten Ordnung wird durch 9 Puncte bestimmt.

496. Anm. Dieses mit 494 verglichen, giebt einige scheinbare Wiedersprüche, welche man vom Cramer §. 47. 48. und vom Euler Mem. de l'Ac. de Pr. 1748. p. 219. gehoben findet.

Von den geometrischen Oertern.

497. Erkl. Wenn die Gleichung für eine unbestimmte Aufgabe (179) nur zwo unbekannte Grössen enthält; so heißt die Linie, welcher sie zukömmt (335) der Aufgabe geometrischer Ort. (locus)

So ist die Ellipse, deren Brennpuncte F; f; sind, die Axe = a ist, der Ort der Aufgabe (475).

498. Anm. Diese Benennung ist von den Alten bey ihrer geometrischen Analysis gebraucht worden. Sie haben auch die gerade Linie und den Kreis loca plana; die Linien der zweyten Ordnung, den Kreis ausgenommen, loca solida genannt, weil sie solche betrachteten, wie sie aus dem Schnitte des Kegels als eines Körpers entstunden. Von den übrigen Linien war ihre Kenntniß sehr eingeschränkt und unvollkommen, sie nannten solche loca linearia. Pappus Collection. Math. Lib. IIII. ante Prop. 31.

499.

499. Zus. Wenn man aus zwo Gleichungen, H; K; die x; y; enthalten, eine V macht, die nur x enthält, (199) und also den Durchschnitt O; 24 F. der beyden Oerter BN; CM; sucht (494) so ist die gemeinschaftliche Abscisse AQ die Wurzel der Gleichung V; oder es ist auch die gemeinschaftliche Ordinate OQ diese Wurzel, wenn man die Abscisse aus der dritten Gleichung weggeschafft hätte. Wenn man also die beyden Oerter BN; CM beschreibt, so geben ihre Durchschnitte die Wurzeln der bestimmten Gleichung. Sind unter diesen Wurzeln unmögliche, so wird es nicht soviel Durchschnitte geben, soviel Abmessungen V hat.

Von der Construction der Gleichungen.

500. Erkl. Eine bestimmte Gleichung verzeichnen (construere) heißt, durch Zeichnung Linien finden, welche ihre Wurzeln vorstellen. Es wird zum vorausgesetzt, daß alle gegebenen Grössen in geraden Linien gegeben sind.

501. Zus. Wenn für eine Gleichung des ersten Grades $y = \frac{ab}{c} + d$ so sucht man zu c; b; a'; die vierte Proportionallinie e da denn $y = e + d$;

502. Zus. Für eine Gleichung des zweyten Grades $xx = ax + bc$ ist die Wurzel $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{}$

$\pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + bc)}$. Man setze also eine Linie, deren Quadrat $= bc$ ist, mit $\frac{1}{2}a$ rechtwinklicht zusammen. Die Hypothenuse des Dreyecks, das solchergestalt entsteht, ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + bc)} = f$ und $y = \frac{1}{2}a \pm f$. Man begreift leicht, wie man sich zu verhalten hat, wenn a oder bc verneint sind. Meine Absicht ist blos auf eine kurze und leichte Art die Construction dieser Gleichungen allgemein zu zeigen. Bey verschiedenen Schriftstellern findet man andere. S. Hausen El. Geom. Pr. 53. 54. Euler: Introd. in Analys. inf. L. II. §. 489.

503. Aufg. Die Durchschnitte eines gegebenen Kreises mit einer gegebenen Parabel zu finden.

Aufl. Der Parabel AM; 25 F. Axe sey AE; der Parameter $= a$; des Kreises Mittelpunct sey G; sein Halbmesser $GM = r$; das Perpendikel $GE = c$; $AE = b$; GK mit der Axe parallel. So ist wegen des Kreises; $KM^2 + KG^2 = GM^2$: Aber $KM = PM - PK$; $KG = AE - AP = AE - PM^2 : a$; wegen der Parabel; also $(PM - PK)^2 + (AE - PM^2 : a)^2 = GM^2$ oder $(y - c)^2 + (b - yy : a)^2 = rr$; diese Gleichung wird (P)

$$y^4 + aa\,yy - 2aacy + a.\begin{cases} +bb = o \\ +cc \\ -rr \\ -2ab \end{cases}$$

504.

504. Zus. Wenn der Kreis die Parabel im Scheitel A schneiden soll; so ist $rr = bb + cc$ und das letzte Glied, wird $= ○$; folglich auch ein Werth von y (225) wie sich gebühret. Die übrigen drey sind also in folgender Gleichung enthalten (Q)

$$y^3 + aay - 2aac = ○$$
$$- 2ab$$

505. Aufg. Eine cubische Gleichung, deren zweytes Glied fehlt,

$$x^3 + \pi z + \varrho = 0 \text{ (R)}$$

durch den Kreis und die Parabel zu construiren.

Auft. I. Man setze die z in R; sollen mit den y in Q; einerley seyn; so ist $aa - 2ab = \pi$; $\varrho = -2aac$; Man hat also zwo Gleichungen, drey unbekannte Grössen a; b; c; zu bestimmen. Folglich kann man eine von diesen dreyen nach Gefallen annehmen. Es ist am bequemsten, a dazu zu wählen, denn so kann man einerley einmahl gezeichnete Parabel zu allen cubischen Gleichungen brauchen. Also ist

$$b = \tfrac{1}{2}a - \frac{\pi}{2a}; \quad c = -\frac{\varrho}{2aa};$$

II. Sind nun die Coefficienten π; ϱ; durch Linien gegeben, so muß wegen der Gleichheit der Abmessungen, π zwo Abmessungen und ϱ drey haben. Man kann also, da a auch eine Linie ist, setzen,

 $\pi = ap$;

$\pi = ap$; $\varrho = aaq$ wo p; q; Linien seyn werden, die durch a und π; ϱ; gegeben sind. Also ist
$b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$; $c = -\frac{1}{2}q$
oder es sind die beyden Linien AE; EG; folglich der Mittelpunct G gegeben, daraus ein Kreis mit dem Halbmesser GA (504) beschrieben, die Parabel noch in drey Puncten schneidet, deren Ordinaten MP; die Linien z in der Gleichung R sind.

III. Exempel. Man soll zwischen zwo gegebenen Linien e; f, zwo mittlere Proportionallinien finden. Die erste unter ihnen heisse z; so heissen die vier Linien nach einander $e; z; \frac{z^2}{e}; \frac{z^3}{e^2}$; die letzte aber ist $= f$; also $z^3 - e^2 f = o$; (R oder $\pi = o$; $p = o$; $\varrho = -eef$ daher $q = -\frac{ee}{aa}f$; also AE oder $b = \frac{1}{2}a$; EG oder $c = +\frac{ee}{2aa}f$

Der Kreis kann die Parabel auser dem Puncte A, nur noch einmahl schneiden, weil in der Gleichung R nur ein z möglich ist, (237) und die Ordinate dieses Durchschnittes ist die gesuchte erste unter den mittlern Proportionallinien, daraus man die zweyte leicht findet.

IIII. Sind aber π; ϱ; Zahlen, so nehme man a für die Einheit an, da denn $p = \pi$; $q = \varrho$ wird, oder man nimmt für p; q; Linien, die sich zu a verhal-

halten, wie die Zahlen π; ϱ; zur Einheit. Die Ordinaten werden, a zur Einheit gebraucht, die Wurzeln vorstellen, die man also in Zahlen ausdruckt, wenn mann a wie z. E. einen verjüngten Maaßstab, in 1000 Theile eintheilet.

V. Ex. $z^3 - 41z - 30 = 0$; Man beschreibe eine Parabel mit einem willkührlichen Parameter $a = 1$; und setze $p = -41$; $q = -30$; also b oder $AE = \frac{1}{2} + \frac{41}{2}$ und c oder $EG = +15$; der Kreis aus G mit GA beschrieben, wird die Parabel in drey Puncten schneiden, des einen Ordinate wird = 6 d. i. sechsmahl so groß als der Parameter seyn. Die andern sind Irrationalzahlen, oder sie haben zum Parameter eine Irrationalverhältniß.

VI. Wegen der Lage der Linien ist zu bemerken, daß man in der Rechnung angenommen hat, die bejahten Linien fallen über die Axe, und vom Scheitel hineinwärts: Die verneinten bekommen also die entgegengesetzte Lage. Wäre z. E. $z^3 + 6z + 20 = 0$ also $p = +6$; $q = +20$; so wäre $b = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ und $c = -10$. Also müßte man $AE = \frac{5}{2}$ linker Hand des Scheitels nehmen, und dadurch $EG = 10$ unter die Axe hinunter setzen.

506. Aufg. Eine biquadratische Gleichung, deren zweytes Glied fehlt

$$z^4 + \pi z^2 + \varrho z + \sigma = 0 \quad (S)$$

zu construiren.

Anst. Man macht S mit P (503) verglichen, eben die vorigen Gleichungen, und findet also b; c; wie vorhin. (505) Nun kömmt noch $\sigma = aa(bb + cc - rr)$ oder $rr = bb + cc - \sigma : aa$, welches den Halbmesser bestimmt.

Wenn σ in der Gleichung eine verneinte Grösse bedeutet, so ist dieser Ausdruck des Halbmessers allemahl möglich, und kann also da jede Parabel wie (505) gebraucht werden. Ist aber σ in der Gleichung bejaht, so kann dieser Ausdruck für den Halbmesser was Unmögliches gebeu. Alsdenn setze man $rr = bb$ und $cc = \sigma : aa$; Aus der letzten Gleichung findet sich (505) $a = \varrho : 2\sqrt{\sigma}$; welches möglich ist, weil σ bejaht ist, diesen Parameter der Parabel muß man also gebrauchen. Er giebt $b = r = (\varrho\varrho - 4\pi\sigma) : 4\varrho\sqrt{\sigma}$ und $c = 2\sigma : \varrho$

507. Anm. I. Diese Construction der cubischen und biquadratischen Gleichungen ist vom Cartesius Geom. L. III. zuerst gelehret worden. Nach diesem haben sich verschiedene sehr damit beschäfftiget; als Bater in claue Geom. catholica; Halley in Aufsätzen de constructione aequationum, die man aus den philos. Transact. bey Gravesands Ausg. von Newt. Ar. vniu. p. 274. findet; u. a. m.

II. Weil ein Kreis auch die Ellipse und die Hyperbel in vier Puncten schneidet, und weil zwo Linien der zweyten Ordnung einander in vier Puncten schneiden, (494) so liessen sich vermittelst dieser krummen Linien eben solche Constructionen angeben; S. Schoten Comm. in Geom. Cart. L. III. p. 325. Man hat die Construction durch die Parabel für einfacher erklä-

erkläret, weil der Parabel Gleichung einfacher ist. Aber Newton Ar. VII. p. 232. hat hierüber sehr gegründete Erinnerungen gemacht. Die Absicht der Construction ist, das Gesuchte durch Zeichnung zu finden: Also ist für sie, die Linie am einfachsten, die sich am leichtesten verzeichnen läßt, ihre Gleichung mag aussehen wie sie will. Weil eine gerade Linie die Parabel in zween Puncten schneidet, so könnte man die quadratischen Gleichungen, die zwo Wurzeln haben, durch die Parabel und die gerade Linie construiren, und man sollte sie zu dieser Absicht dem Kreise vorziehen, wenn die Construction einfacher hiesse, deren Linie die einfachere Gleichung hat. So ungereimt dieses wäre, so offenbahr erhellt daraus, daß man die Construction nicht für einfacher zu halten hat, die eine Linie von einer einfachern Gleichung braucht. Dieserwegen hat Newton Ar. VII. p. 215. verschiedene Constructionen durch andere Linien, die sich leichter beschreiben lassen, gelehret.

III. Ueberhaupt scheinen die Constructionen der höhern Gleichungen durch krumme Linien eben keinen grossen Nutzen zu haben. Diese Linien durch Puncte zu verzeichnen, wie 361 2 379; 415, ist viel zu mühsam; es gibt auch nicht anders als durch unendliche Arbeit, d. i. nie, alle Puncte, und folglich ist man nicht sicher die Durchschnittspuncte, die man vornehmlich sucht, auf diese Art zu bekommen. Werkzuge, welche andere krumme Linien mit einer stetigen Bewegung beschreiben, wie der Reißzirkel den Kreis, sind wohl ausgedacht worden, aber man hat sie bey weiten nicht so leicht, und ihr Gebrauch ist bey weiten nicht so bequem, und so zuverlässig als der Gebrauch des Reißzirkels. Will man die Wurzeln einer Gleichung wirklich zu einem practischen Gebrauche wissen, so ist die Construction auch deßwegen unzulänglich, weil sie diese Wurzeln nicht in so kleinen Theilen der angenommenen Einheit gibt, als

man

man will. Man wird den Parameter der angenommenen Parabel, (505) schwerlich in tausend Theile, und gewiß nicht in mehrere theilen. Man hat also die Wurzeln nicht weiter als in Tausendtheilen, und durch eine Arbeit, die vielleicht mühsamer ist als die Rechnung, (321) vermöge der man sie viel genauer finden könnte. Die Alten haben noch mehr Ursache gehabt, dergleichen durch Verzeichnungen zu suchen, weil ihnen die Kunstgriffe nicht so bekannt waren, durch welche wir jetzo Rechnungen leicht vollführen, die ihnen sehr schwer aussahen. Zu dergleichen Absicht haben Nicomedes und Diokles die Linien (477; 469;) gebraucht. Pappus; Coll. Matth. L. III. Prop. V. u. s. w.

508. Anm. Es sind unter den Alten vornehmlich ein paar hieher gehörige Aufgaben berühmt gewesen; Die Verdoppelung des Würfels (problema deliacum) und die Theilung eines Winkels in drey Theile. Wenn man z die Seite eines Würfels der noch einmahl so groß als der Würfel von g ist, finden soll, so heißt dieses die Gleichung $z^3 - 2g^3 = 0$ auflösen; d. i. zwischen g und 2g zwo mittlere Proportionallinien finden, wenn man in 505. III; $e = g$; $f = 2g$ setzt, und man hat daher die Frage unter beyderley Ausdrückungen vorgetragen. Weil sich ähnliche Körper wie die Würfel von Linien, die an ihnen auf eine ähnliche Art gezogen sind, verhalten, (G. 66. S. Anm.) so kömmt man ebenfalls auf eine solche cubische Gleichung, wenn man einen Körper mit Beybehaltung der Aehnlichkeit nach einer gegebenen Verhältniß grösser oder kleiner machen will. Sollen sich ein paar ähnliche Körper wie $e : f$ verhalten, und eine Linie in einer gegebenen Lage, z. E. die Länge, heißt bey einem k; bey dem andern z; so ist $e : f = k^3 : z^3$ oder $z^3 = k^3$ f: e woraus die Gleichung 505 III; wird, wenn man $k = e$ setzt. Daher ist diese Aufgabe auch bey den Alten denen vorgefallen, die sich

mit

mit dem Maschinenwesen beschäftigten. Papp. Coll. Math. L. VIII. Prop. XI. Hero Ctesibius; sub fin. Belopoeecorum. Eutocius hat in s. Anmerk. über des Archimedes zweytes Buch von der Kugel und dem Cylinder, die Bemühungen der Alten zur Auflösung dieser Aufgabe gesammlet. Daß sich der Würfel durch Erfindung zwoer mittlern Proportionallinien verdoppeln lasse, hat nach seinem Berichte Hippokrates zuerst bemerkt, an dessen Exempel viele neuere Aerzte unter andern auch den Werth der Mathematik lernen könnten.

509. Zus. Daß die Theilung eines Winkels in drey Theile auf eine cubische Gleichung führet, erhellt aus 175. Wenn man dorten des dreyfachen Winkels Sinus = k nennt, so ist $k = 3abb - a^3$ Nun setze man $1 - aa$ statt bb und sehe a als die gesuchte Grösse, k als die gegebene an, weil der ganze Winkel dreymahl so groß als sein Drittheil ist: So kömmt $a^3 - \frac{3}{4}a \dotplus \frac{1}{4}k = 0$.

510. Anm. Die drey Werthe von a in dieser Gleichung findet man so: u bedeute den kleinsten Bogen, dessen Sinus k ist; (weil ein Sinus zu mehr Bogen gehöret, (Trig. 2. Erkl. 8. Zus.) P bedeute den ganzen Umfang des Kreises; so bedeutet a; folgende drey Sinus: von $\frac{1}{3}u$; von $\frac{1}{3}.(u+P)$; von $\frac{1}{3}(u+\frac{1}{2}P)$. Die beyden ersten Werthe sind bejaht, der letzte ist verneint. Dieses folgt aus meiner (170) angeführten Schrift §. 60.

511. Zus Man kann also einen gegebenen Winkel überhaupt nicht anders in drey Theile theilen, als durch die Construction einer cubischen Gleichung.

In

In dem besondern Falle des rechten Winkels ist $k = 1$; und die Gleichung heißt $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} = 0$. Man weiß aber, daß der Werth von a den man eigentlich hier sucht $= \sin 30° = \frac{1}{2}$ (Trig. 2. Erkl.) ist. In der That ist auch $\frac{1}{8} - \frac{3}{4}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$. Ferner giebt $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}$ mit $a - \frac{1}{2}$ dividirt (226) die Gleichung $aa = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ deren Wurzeln $+\frac{1}{2}$; oder -1; nach (510) die Werthe der Sinusse für $\frac{1}{3}.(90 + 4.90)$ G. $= 150$ Gr. und $\frac{1}{3}.(90 + 2.90)$ Gr. $= 90$. Gr. sind.

512. Anm. Verschiedene haben sich geirret, wenn sie beyde Aufgaben (508) blos durch Kreis und gerade Linien aufzulösen gesucht haben; wovon man beym Pappus Coll. Math. L. III. sub in. und wegen der zweyten am Ende des vierten Buchs von Campani Euklides, Exempel findet. Ein Kreis kann eine gerade Linie nur in zween Puncten schneiden: Und also können seine Durchschnitte keine Wurzeln von höhern Gleichungen geben, als die quadratischen sind. (499) Dieses ist die 173 versprochene Erläuterung.

513. Anm. Da man gegenwärtig durch die trigonometrischen Tafeln, bequem den Sinus des dritten Theiles jedes Winkels, dessen Sinus gegeben ist, finden kann; so haben die Neuern die Sache umgekehrt betrachtet; und die Wurzeln einer gegebenen cubischen Gleichung wie die (505; I) so zu finden getrachtet; daß sie selbige Gleichung mit der $a^3 - \frac{3}{4}r^2 a + \frac{1}{4}k r^2 = 0$ (509) vergleichen, wo ich den Halbmesser nun r nenne. Wenn man nähmlich annimmt, a (509) soll das z (505) seyn, und folglich die Coefficienten, die zu einerley Potenzen von a und von z. gehören, gleich setzt, so bekömt man $r = 2\sqrt{-\frac{1}{3}\pi}$ (wel-

(welches möglich ist, wenn π eine verneinte Grösse bedeutet;) und $k = -3\pi : \varrho$ durch die so gefundene Verhältniß $k : r$ ist also ein Winkel u gegeben, und die Sinus von $\frac{1}{3}u$; $\frac{1}{3}.(u + P)$; $\frac{1}{3}(u + \frac{1}{2}P)$ werden die gesuchten Wurzeln seyn. Die vollständige Erklärung dieses Verfahrens wird mir hie zu weitläuftig und beruhet auf Gründen, die ich hier nicht erwiesen habe. (510) Auch ist es desto entbehrlicher, da wir nach (331) die Wurzeln viel schärfer finden können. Man s. davon Halleys (507) angef. Schrift pag. 291. Landen Mathematical Lucubrations Part. VI. Theor. II. Der letztere hat die cubische Gleichung so betrachtet, daß das zweyte Glied in ihr nicht fehlt, d. i. ohne den geringsten Nutzen die Rechnung ungemein viel beschwerlicher gemacht.

Wie die Natur der Flächen, welche Körper begränzen, durch Gleichungen ausgedrückt wird.

514. Lehns. Wenn M (26. F.) einen Punct vorstellt, der sich über der Ebene des Papiers erhoben befindet; so fälle man von ihm auf die Ebene des Papiers das Loth MQ; (G. 46. S. 3. Z.) durch A einen willkührlich angenommenen Punct in der Ebene des Papiers; ziehe man in ihr eine willkührliche Linie, und fälle auf solche das Perpendikel QP; das auch in ihr liegen wird. (G. 2. Th. Grundl.) Sind nun AP; PQ; QM; gegeben, so ist der Punct M gegeben.

515. Zus. Wenn mehr dergleichen Puncte M; in einer gegebenen krummen oder ebenen Fläche liegen; und wenn man in der Ebene des Papiers für alle eine gemeinschaftliche Linie AB gezogen hat, alsdenn aber für jeden die Perpendikel MQ; QP; zieht; so wird die Vergleichung zwischen AP; PQ; QM; durch die Natur der Fläche bestimmt werden, und für eine andere Fläche, bey eben der Linie AB; und eben dem Puncte A anders seyn.

516. Erkl. Wenn AP = x; PQ = y; QM = z; so heißt die Gleichung zwischen x; y; z; die Gleichung für die Fläche, in der sich M befindet. Die Ebene des Papiers mag die Grundfläche heissen.

517. Er. Befände sich M in einer Ebene, die mit der Grundfläche gleichlaufend ginge; so wäre z unveränderlich, und würde also durch x; y; gar nicht bestimmt. Für sie wäre also die Gleichung z = b wo b die Weite beyder Ebenen bedeutet.

518. Er. Befände sich M in einer Ebene, von welcher die Grundfläche in AB geschnitten würde, so wäre PQ: QM wie der Sinus totus zur Tangente von beyder Ebenen Neigungswinkel MPQ (G. 46 S. 6. Z. und 2. Th. 2 Erkl.) Diese Verhältniß wäre also beständig, z. E. = 1: n oder die Gleichung hiesse ny = z.

519. Er. Befände sich M in einer Kugelfläche, deren Mittelpunct A, der Halbmesser AM = a wäre;

re; so hätte man $AM^2 = MQ^2 + AQ^2 = MQ^2 + QP^2 + PA^2$ oder $a^2 = z^2 + y^2 + x^2$.

Von den Schnitten der Flächen.

520. Erkl. Wenn sich eine Reihe von Puncten wie M 26 F. in einer Ebene, in einer geraden oder krummen Linie; in einem Orte (497) befindet, so heißt die Reihe der ihnen zugehörigen Puncte Q (514) eigentlich ihre orthographische Projection (Siehe Perspect. 23) oder hier überhaupt ihre Projection.

521. Aufg. Wenn die Ebene des Orts von M (520) die Grundfläche in CO schneidet; (27. Fig.) aus der Gleichung für den Ort; die Gleichung für die Projection zu finden.

Aufl. C. seyn ein willkührlicher Anfang der Abscissen, CT; TM; seyn senkrechte Coordinaten für den Ort des Punctes M; so ist MTQ der Neigungswinkel der Ebene des Ortes gegen die Grundfläche (wie 518) also die Verhältniß TQ: TM gegeben; z. E. = 1: m; folglich TM = m. TQ; Man darf also in die Gleichung zwischen CT und TM; nur m. TQ statt TM setzen, so hat man die zwischen CT und TQ;

322. Zus. Umgekehrt, wäre die Gleichung zwischen CT und TQ gegeben, so dürfte man in sie

nur

nur TM: m stat TQ seßen, um die zwischen CT und TM zu finden.

523. Exempel des Zusazes Es sey $CT^2 + TQ^2 = rr$ einer beständigen Grösse; so ist auch $CT^2 + \frac{TM^2}{mm} = rr$ oder $TM^2 = mmrr - mm.CT^2$; befindet sich also Q in einem Kreise, dessen Mittelpunct C; der Halbmesser r; so befindet sich M in einer Ellipse, deren Mittelpunct C; die kleine Axe $= 2mr$ die grosse $= 2r$ (368)

524. Zus. Ein senkrechter Cylinder mit einer Ebene durchschnitten gibt eine Ellipse. Denn M in 523 kann jeden Punct in der Fläche eines solchen Cylinders bedeuten.

525. Zus. Wenn die Ebene des Ortes der Grundfläche parallel ist, so ist der Ort des Punctes Q, dem Orte des Punctes M gleich und ähnlich. Die je beyden Oerter sind nähmlich hier gegenüberstehende Grundflächen eines prismatischen Körpers. (G. 53. S.)

526. Aufg. Die Gleichung für den Schnitt einer Fläche zu finden, der in der Weite h mit der Grundfläche parallel geschieht.

Aufl. Man seße $z = h$.

Bew. In der Gleichung für die Fläche (516)

konn-

konnten x, y, alle Coordinaten in der Grundfläche bedeuten, die jedem Puncte der Fläche zugehörten. In der Gleichung, wo z = h ist, können sie nur die bedeuten, die den Puncten der Fläche zugehören, welche die Entfernung h von der Grundfläche haben: Aber diese Puncte liegen in der Ebene des Schnittes in eben der Figur, in welcher in der Grundfläche die ihnen zugehörigen Puncte Q liegen, (525) also ist die Gleichung für sie, mit der Gleichung einerley, welche x und y für die ihnen zugehörigen Puncte Q geben, oder man kann sich in der Ebene des Schnittes für die Puncte M Coordinaten vorstellen, welche den Coordinaten TQ; TC für die Puncte Q gleich und parallel seyn, also eben die Gleichung geben werden.

527. Ex. Für die Kugel (519) ist $yy + xx = aa - hh$ oder der Schnitt ein Kreis, dessen Halbmesser $\sqrt{(aa - hh)}$ (wie G. 49. S.) Die Gleichung 519 bleibt eben dieselbe, was für eine Lage auch die Grundfläche durch der Kugel Mittelpunct hat; Man kann also die Ebene, welche die Kugel schneiden soll, legen wie man will, und ihr allemahl die Grundfläche parallel legen, daher gegenwärtiger Beweis allgemein ist.

528. Zus. Wenn in einer Gleichung für eine Fläche; die veränderliche Grösse z nicht enthalten ist, so sind alle Schnitte, die mit der Grundfläche parallel gehen, der Grundfläche gleich und ähnlich. Eine solche Gleichung bestimmt prismatische oder cylindrische Körper.

Von Flächen, deren Gleichungen gleichartig sind.

529. **Erkl.** Eine Gleichung heißt gleichartig (homogenea) wenn die Abmessungen der veränderlichen Grössen in einem ihrer Glieder soviel zusammen, als in dem andern betragen.

530. **Zus.** Wenn die veränderlichen Grössen Linien sind, so müssen die Coefficienten nur Zahlen seyn; weil an sich alle Glieder der Gleichung, indem sie zusammen ein Ganzes ausmachen, oder sich aufheben sollen, gleichartig seyn müssen;

531. **Zus.** Zwey Glieder einer gleichartigen rationalen Gleichung, die nur zwo veränderliche Grössen enthält, lassen sich so vorstellen:

$$\pi x^{\varkappa-\lambda}\, y^{\lambda} + \varrho x^{\varkappa-\mu}\, y^{\mu}$$

wo die griechischen Buchstaben Zahlen bedeuten. Diesen Gliedern müssen alle ähnlich seyn: Soviel nähmlich in jedem Gliede der Exponent von x weniger als $\varkappa$ ist, so groß ist in eben dem Gliede der von y.

532. **Lehrs.** Jede gleichartige rationale Gleichung zwischen zwo veränderlichen Grössen, gehört für eine gerade Linie.

Bew. Man setze $y = \theta x$ so wird aus der Gleichung eine bestimmte,

$$\pi\theta^{\lambda} \cdot x^{\varkappa} + \varrho \cdot \theta^{\mu} \cdot x^{\nu} \ldots = 0$$

da sich nähmlich alle Glieder mit $x^{\varkappa}$ dividiren lassen: Aus derselben läßt sich also die Zahl θ finden. Aber $y = \theta x$ ist eine Gleichung für eine gerade Linie. (340)

533. Zus. Diese gerade Linie geht durch den Anfang der Abscissen.

534. Lehrs. Eine gleichartige Gleichung zwischen drey veränderlichen Grössen sieht so aus:

$$z^{\alpha} = \beta . z^{\alpha-\delta} . x^{\delta} + \gamma . z^{\alpha-\varepsilon} . y^{\varepsilon} + \theta . x^{\alpha-\pi} y^{\pi}$$

$$+ \eta z^{\alpha-\varkappa-\lambda} . x^{\varkappa} . y^{\lambda}$$

; z ist eine Function von x u. y von einer Abmessung.

Ich stelle nähmlich jede Gattung von Gliedern, die in der Gleichung seyn kann, durch ein solches Glied vor, das nach und nach durch Veränderung der Exponenten sie alle bedeuten kann: So kann das Glied, wo $\alpha - \delta$ der Exponent von z: und δ der vom x ist; alle nach der Ordnung bedeuten, welche Producte aus Potenzen von z und x in einander, aber kein y enthalten; und wenn man $\delta = \alpha$ setzt, so kömmt das Glied heraus, das allein x enthält. So stellt das zweyte Glied, wenn man für ε; das dritte, wenn man für π; und das vierte, wenn man für $\varkappa$; λ; nach und nach andere Zahlen setzt, alle Glieder vor, die Producte aus z in y; oder y allein; Producte aus x in y oder y allein, Producte aus z in x in y; oder eine von diesen drey Grössen allein enthalten, denn dieses letzte Glied könnte jedes der übrigen vorstellen, nachdem man $\varkappa = o$;

oder $\lambda = o$; oder $\varkappa + \lambda = \alpha$ oder endlich $\varkappa$ und λ jedes $= o$ sezte.

535. Lehrs. Wenn die Natur einer Fläche durch eine gleichartige Gleichung (534) ausgedrückt wird, so wird diese Fläche von einer Ebene, die über QA auf der Grundfläche senkrecht steht, in einer geraden Linie MA geschnitten.

Bew. Weil der Punct M in der Fläche ist, so ist ⊙) $MQ^{\alpha} = \eta . MQ^{\alpha-\varkappa-\lambda} . PQ^{\lambda} . AP^{\varkappa}$ Ich brauche hier noch (534) der Gleichung lezztes Glied alle übrigen vorzustellen; ich sage nähmlich nichts weiter, als daß die Exponenten der drey veränderlichen Grössen in jedem Gliede einerley Summe zusammen ausmachen; Befindet sich nun der Punct M zugleich in einer senkrechten Ebene über AQ; so ist die Lage des Durchschnittes dieser Ebene mit der Grundfläche, oder der Linie AQ gegeben, folglich die Verhältniß AQ: AP; und die AQ: QP gegeben. Es sey erstlich $PQ = \mu . AP$; so ist

$$MQ^{\alpha} = \eta . MQ^{\alpha-\varkappa-\lambda} . \mu^{\lambda} . AP^{\varkappa+\lambda} \quad (\text{C})$$

oder aus ⊙ wird die gleichartige C die nur MQ und AP enthält, weil man statt PQ überall $\mu . AP$ sezen kann. Nun ist $AQ = \sqrt{(AP^2 + PQ^2)} = AP . \sqrt{(1 + \mu\mu)}$. Man kann also in C überall $AQ : \sqrt{(1 + \mu\mu)}$ statt AP sezen, so verwandelt sie sich in die gleichartige ♂

MQ

$$M\,Q^{\alpha} = \eta . MQ^{\alpha \cdot \varkappa \cdot \lambda} \left(\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu\mu)}} \right)^{\lambda} AQ^{\varkappa+\lambda}$$

zwischen MQ und AQ; die also für eine gerade Linie durch A gehört (533) Alle Puncte der Fläche also, die sich zugleich in der senkrechten Ebene befinden, liegen in der geraden Linie AM.

536. Lehrs. Eine gerade Linie von A nach einem willkührlichen Puncte der Fläche M; gezogen, liegt ganz in der Fläche, oder jeder Punct von ihr ist ein Punct der Fläche.

Bew. Man kann sich für jedes M ein Loth MQ; und eine senkrechte Ebene über AQ vorstellen, deren Durchschnitt mit der Fläche die gerade Linie AM ist. (535)

537. Zus. Weil der Durchschnitt zwoer Flächen, alle Puncte, die ihnen gemein sind, enthält, so gibt es in der Ebene AMQ keinen Punct der Fläche auser der Linie AM.

538. Lehrs. Eine willkührlich gelegte Ebene, schneide die Fläche in der Figur MTS 28 F. Man stelle sich eine Ebene durch A mit jener parallel vor; μ sey ein Punct der Fläche auf eben der Seite der parallelen Ebene, auf welcher die Ebene MTS liegt, so wird $A\mu$ den Umfang der Figur MTS irgendwo schneiden.

Bew. Man fälle von A auf die Ebene des Schnittes das Loth AG die Ebene μAG wird auf die Ebene MTS senkrecht seyn, (G. 47 S.) folglich solche in GM schneiden daß AGM = R; weil nun jeder Punct der Linie Aμ in der Fläche ist, (536) so muß der Punct von ihr, welcher zugleich in der Ebene MTS ist, in dieser Ebene Durchschnitt mit der Fläche; d. i. in dem Umfange der Figur MTS liegen.

539. Zus. Wenn eine gerade Linie, die beständig durch A gehet, so geführet wird, daß sie zugleich beständig durch den Umfang der Figur MTS geht, so geht sie durch alle Puncte der Fläche, welche von A nach der Ebene MTS zu liegen; oder sie beschreibt das Stück der Fläche, das von A nach MTS zu liegt.

450. Anm. Wäre MTS ein Kreis so würde solchergestalt ein Kegel beschrieben, (G. 61. S. 4. Z.) daher man dieses eine Kegelförmige Bewegung (motum conicum) nennt.

541. Anm. Liegt μ in der parallelen Ebene, so rückt das ihm zugehörige M ins Unendliche hinaus. Fällt μ auf die entgegengesetzte Seite der parallelen Ebene; so trifft μA rückwärts verlängert in M; das letzte läßt sich durch die Erzeugung entgegengesetzter Kegel erläutern. Die Linie CB 31. F. in dem sie immer durch den Punct C geht, so herumführen, daß sie den Umfang des Kreises, der DB zum Halbmesser hat, durchläuft, heißt, zugleich das rückwärts verlängerte Stück CB dieser Linie so herumführen daß es

den

den Umfang eines Kreises der Bδ zum Halbmesser hat, durchläuft. Also wird nie ein Kegel ohne seinen entgegengesetzten beschrieben, beyde nähmlich gehen nach beyden Seiten ihres gemeinschaftlichen Scheitels ohne Ende aus einander.

542. Lehrs. Eine Ebene, welche mit der Ebene MTS parallel ist, schneide die Fläche in der Figur $\mu\tau\sigma$. Ich nehme an, daß μM; Tτ; Sσ; gerade Linien durch A sind, (538) beyde Schnitte werden ähnlich seyn.

Bew. Die Ebenen beyder Schnitte, werden von der Ebene AMT in MT; $\mu\tau$; von der Ebene A'TS in 'TS; $\tau\sigma$; geschnitten; so daß MT mit $\mu\tau$; TS mit $\tau\sigma$ parallel ist. (G. 2. Th. 2. Erkl. Zus.) Also ist MTS = $\mu\tau\sigma$ (G. 46. S. 2. B.) ferner (G. 25. S.) AT: Aτ = TM: $\tau\mu$ = TS: $\tau\sigma$ oder die Dreyecke MTS; $\mu\tau\sigma$ ähnlich. (G. 28 S.) Man nehme MT für eine Abscissenlinie des ersten Schnittes; $\mu\tau$ für die des zweyten an, und ziehe zu der ersten, Ordinaten SF in einem gegebenen Winkel, zu der zweyten Ordinaten $\sigma\Phi$ in einem gleichen Winkel Φ; so ist SFT = $\sigma\Phi\tau$; aber vorhin wegen der ähnlichen Dreyecke; T = τ also $\tau\sigma\Phi$ = TSF und (G. 26. S.) SF: $\sigma\Phi$ = ST: $\sigma\tau$ = MT: $\mu\tau$ wie vorhin erwiesen worden. Imgleichen SF: $\sigma\Phi$ = TF; $\tau\Phi$; also MT: $\mu\tau$ = F'T: $\Phi\tau$ und MT: $\mu\tau$ = MF: $\mu\Phi$ (Ar. V; 34; II.) daher MF: $\mu\Phi$ = FS: $\Phi\sigma$. Wenn man also in beyden Schnitten, die Puncte zusammengehörige nennt, die in einer geraden Linie durch

A liegen; und wenn man durch ein Paar willkührliche Puncte M; T in einem Schnitte, eine Abscissenlinie durch die mit ihnen zusammengehörigen $\mu\tau$, eine Abscissenlinie im andern zieht, ferner die Abscissen in beyden Schnitten von den zusammengehörigen Puncten M; μ; an rechnet, so verhalten sich die Ordinaten zusammengehöriger Puncte S; σ; wie ihre Abscissen; das heißt, die Figuren der Schnitte sind einander ähnlich. (387) Die Lagen der Puncte M; μ; werden nähmlich in einem Schnitte wie in dem andern, durch die Linie, die aus A durch beyde geht, bestimmt; d. i. die Puncte M; μ; haben in beyden Schnitten eine ähnliche Lage; (puncta sunt similiter posita) und so verhält es sich auch mit den Puncten T; τ; und also mit den Linien MT; $\mu\tau$; imgleichen mit den Puncten S; σ; oder zu jedem willkührlichen Puncte S in einem Schnitte, gehört einer σ im andern, so, daß S; σ; gegen die ähnlich liegenden Puncte M; μ; ähnliche Lagen haben. Jeder Punct in dem einen Schnitte wird also durch seine Lage gegen ein Paar gegebene Puncte desselben Schnittes eben so bestimmt, wie der zu ihm gehörige Punct des andern Schnitts, durch seine Lage gegen die Puncte, welche in dem andern Schnitte jenen beyden zugehörten. Hieraus ist begreiflich, daß beyde Figuren nur durch die Grösse, nicht durch die Lage ihrer Puncte unterschieden seyn können; weil man zu jeden drey Puncten in einem Schnitte drey in den andern finden kann, die eben die Lage gegen einander ha-

haben, ein ähnliches Dreyeck bestimmen; nur daß sie näher beysammen, oder weiter von einander sind.

543. Anm. Der Beweis beruhet mit dem G. 61 S. auf einem Grunde, nur daß man hier den Begriff der Aehnlichkeit auf krumme Linien erweitert.

544. Zus. Das Loth AG (538) auf beyder Schnitte Ebene, (G. 46. S. 10. Z.) treffe in die Ebene $\mu\tau\sigma$ in γ; So ist (G. 26. S.) AG: Aγ = GM: $\gamma\mu$ = GT: $\gamma\tau$ auch MGT = $\mu\gamma\tau$ (G. 46. S. 2. Z.) daher (G. 28 S.) MT: $\mu\tau$ = MG: $\mu\gamma$ = AG: Aγ; oder ein paar ähnlich liegende Linien in beyden Schnitten, verhalten sich allemahl wie die Weiten der Ebenen der Schnitte von A.

Von runden Körpern.

545. Erkl. Runde Körper (tornata, Sphaeroides) heissen, bey denen eine Reihe paralleler Schnitte lauter Kreise darstellt. Man stelle sich vor, die Linie CM 29 F. werde um ihre Axe AC so gedreht wie ein Halbkreis, wenn er eine Kugel beschreibt, (G. 2. Th. 6. Erkl.) so beschreibt jede Ordinate OM die auf die Axe senkrecht steht, einen Kreis, dessen Halbmesser sie ist, und dessen Ebene auf die Axe senkrecht steht. Folglich ist bey dem beschriebenen Körper jeder Schnitt, der auf die Axe senkrecht steht, ein Kreis.

546. Zus. Man setze die Axe AC durch A 26 F. senkrecht auf die Grundfläche, so ist Q in einem

Kreise, dessen Mittelpunct A (525) also $xx + yy = AQ^2 = OM^2$ 29 F. Nun ist in der Figur MC 29 F. die Ordinate OM durch die Abscisse AO gegeben, oder eine Function von ihr: und AO ist hier $= z$; Also sey Z was für eine Function man will von z; so heißt die Gleichung für runde Körper

$$ZZ = xx + yy$$

547. 1. Ex. M 29 F. sey in einer gerade Linie durch A; also $Z = mz$; so ist nun $zz = xx + yy$ für einen senkrechten Kegel, dessen Axe durch A ginge. Sie ist gleichartig. (536)

548. 2 Ex. M C sey eine Ellipse, (362) so ist ZZ oder

$$\frac{bz - b}{a} . zz = xx + yy$$

für ein elliptisches Sphäroid, $a = \infty$ gibt (384) $bz = xx + yy$ für das paraboliſche und $-a$ statt a gesetzt (390) $bz + \frac{b}{a} zz = xx + yy$ für das hyperbolische.

Von den Schnitten einer Fläche mit jeder gegebenen Ebene.

549. Aufg. Wenn eine Fläche von einer Ebene geschnitten wird, die der Grundfläche nicht parallel ist, (526) die Gestalt des Schnittes zu finden. 30 F.

Aufl. Ee sey der Durchschnitt der Grundfläche mit der schneidenden Ebene, und AE der Abscissenlinie AP senkrecht. ETX sey parallel mit der Abscissenlinie; AE = f; der Winkel TES = θ; Aus Q ziehe man QS senkrecht auf ES so ist die Neigung der schneidenden Ebene MSE; gegen die Grundfläche, der Winkel MSQ (G. 46. S. 6 Z.) der φ heissen mag. Des gesuchten Schnittes Coordinaten sollen ES = t; SM = v seyn. Man fälle vom S auf EX und QP die Perpendikel ST; SV; so ist QM oder z = v. sin φ; QS = v. cos φ; SQV = R — QOX = SEO also SV = QS. sin θ = v. cos. φ. sin θ; und QV = SQ. cos θ = v. cos φ. cos θ. Auch ST = VX = t. sin θ; ET = t. cos. θ; Also AP oder x = t. cos θ + v. cos φ. sin θ und PQ oder y = v. cos φ. cos θ — t. sin θ — f. Diese Werthe von x; y; z; in die Gleichung für die Fläche gesetzt, geben eine Gleichung zwischen t; und v für den Schnitt.

550. Ex. Für einen senkrechten Kegel, 31 F. dessen Höhe AC = b; der Halbmesser der Grundfläche AB = r; ist 29 F. CO:OM oder (546) b — z:Z = b: r; also $\frac{Z = r.\ (b - z)}{b}$ und rr. $(b-z)^2$ = bb. (xx + yy). Man schreibe der Kürze wegen m statt r: b so ist mmzz-2mmbz + rr = xx + y Diese Gleichung bleibt, weil der senkrechte Kegel ein runder Körper ist, die Abscissenlinie AP 26 F.; mag was sie will für eine Lage haben. Man lege sie also mit der Linie Ee 30 F. parallel, so ist θ = o;

Also

Also $z = v. \sin \varphi$; $x = t$; $y = v. \cos \varphi - f$; diese Werthe in die Gleichung für den Kegel gesetzt, geben nach gehöriger Rechnung;

$$\left.\begin{array}{l} tt + (\cos \varphi^2 - mm. \sin \varphi^2). vv \\ \quad - 2. \cos \varphi. f \\ \quad + 2. \sin \varphi. mm. b \\ \quad + ff - rr \end{array}\right\} = o$$

Wenn man diese Gleichung gegen 419 hält, und das dortige x; y; hier t; v; gelten läßt, so ist $\varepsilon = o$; $\zeta = 1$; $\delta = \cos \varphi^2 - mm. \sin. \varphi^2$. Nachdem also hier $- \zeta\delta$; bejaht, verneint, oder $= o$ ist, nachdem ist der Schnitt eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel (465. II.) das ist, nachdem $\cos \varphi^2$ kleiner, grösser, oder so groß als $m^2. \sin \varphi^2$ ist, nachdem ist der Schnitt eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel.

551. Zus. Dadurch daß man $\theta = o$ gesetzt, hat man angenommen Ec 30 F. gehe mit der Abscissenlinie AP parallel (549). Es sey also Ff 31 F. der Durchschnitt der schneidenden Ebene mit des Kegels Grundfläche, so muß die Abscissenlinie für den Kegel, die Linie, welche in der 30 F. AP ist, hier mit Ff parallel gehen, und folglich die Linie AE der 30 F. auf beyde senkrecht seyn. BDC sey ein Durchschnitt des Kegels durch seine Axe AC, und auf die nur erwähnte AE falle der Durchmesser der Grundfläche des Kegels DB; FE ist auf die Ebene BDC senkrecht (G. 47. S. 3. Z.) BDC werde von der Ebene des Schnittes in EG geschnitten,

ten, so daß G in BC folglich in der Fläche des Kegels und in der schneidenden Ebene zugleich, also in dem Umfange des Schnittes ist. So ist FE auf EG senkrecht, (G. 45. S.) also GEA die Neigung der Ebene des Schnittes gegen die Grundfläche des Kegels. (G. 2. Th. 2. Erkl.) = φ;

552. Zus. $\text{col}\,\varphi^2 - mm\,\text{sin}\,\varphi^2$ ist verneint, bejaht, oder Nichts, nachdem es sich mit $\frac{1}{mm} - \left(\frac{\text{sin}\,\varphi}{\text{col}\,\varphi}\right)^2$ so verhält. Aber $\frac{1}{m} = \frac{b}{r} = \text{tang}$ CBA = der Tangente des Winkels, den jede Seite des Kegels mit der Grundfläche macht; den ich β nennen will; und $\text{sin}\,\varphi : \text{col}\,\varphi = \text{tang}\,\varphi$. Also ist der Schnitt (550) eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, nachdem $\text{tang}\,\beta^2 - \text{tang}\,\varphi^2$ verneint, bejaht, oder Nichts ist.

553. Zus. Also ist für die Hyperbel tang β < tang φ; wenn beyde bejaht angenommen werden. Da nun ABC ein spitziger Winkel ist, (G. 9. S. 3. Z.) so gibt es spitzige φ die grösser als β seyn können, das heißt, es gibt für tang φ positive Werthe, (Trig. 4. Erkl. 2. Zus.) wo tang φ > tang β seyn kann. Diese bejahten Werthe für tang φ, wachsen mit φ bis φ = R; alsdenn kommen für stumpfe φ; abnehmende verneinte Werthe von tang φ. Jeder solcher verneinte Werth als verneint betrachtet, könnte nun zwar kleiner heissen

als

als tang ABC (Ar. I. 95.) aber doch kann sein Quadrat, das bejaht ist, grösser seyn als das Quadrat von tang ABC; So lange also der verneinte Werth von tang φ noch so groß ist, daß sein Quadrat grösser ist als das Quadrat von tang ABC; so lange gibt der zugehörige stumpfe φ noch eine Hyperbel. Dieses hört also auf, wenn die verneinten Werthe von tang φ so weit abgenommen haben, daß ein Quadrat vom tang φ dem Quadrate vom tang ABC gleich wird, oder — tang φ = tang β worauf kleinere verneinte Werthe von tang φ folgen. Folglich fällt für die Hyperbel E so daß DEG ein äuserer Winkel des Dreyecks BEG ist, damit DEG $\leqq$ ABC. Will man also durch G; einen willkührlichen Punct des Kegels, einen Schnitt führen, der ein Hyperbel geben soll, so führe man durch G und die Axe, die Ebene ABC; in AB nehme man nach Gefallen einen Punt E zunächst bey B, damit GEA ein spitziger Winkel wird, der den ABC; so wenig als man will übertrifft, und setze auf AE in der Grundfläche das Perpendikel Ff, so ist FGf die Ebene, welche die Hyperbel schneidet. Nun lasse man sich diese Ebene, um eine Axe, die durch den Punct G mit Ff parallel ginge, so drehen, daß sie beständig auf der Ebene DCB senkrecht bleibt, so wird E immer weiter und weiter von B rücken, und es werden andere und andere Hyperbeln herauskommen, bis GE in die Lage Ge kömmt, daß — tang DeG = tang ABC; oder DcG = 2R — ABC oder (weil D = B) eG mit DC gleichlaufend ist.

554.

554. Zus. Dieser letztgenannte Schnitt gibt keine Hyperbel mehr. Für ihn ist $\frac{1}{\text{min}} = \left(\frac{\text{sin}\,\varphi}{\text{cos}\,\varphi}\right)^2$ (552) also giebt er die Parabel.

555. Läßt man sich nun die Ebene des Schnittes um ihre Axe (553) noch weiter drehen, daß der Punct E über e hinaus in ε rückt, so wird tang φ ⇀↽ tang ABC; und die Schnitte geben Ellipsen.

556. Zus. Wenn man die v auf EG; oder eG oder εG; vom E; e; ε; an genommen, als Abscissen ansieht, so gehören für den Schnitt zu jeder Abscisse zwey entgegengesetzte, sonst gleiche, auf die Abscissen senkrechte t; (550) also ist EG oder eG oder εG die Axe des Schnittes aber E nicht der Scheitel (389; 349; 362.)

557. Zus. Jede Linie Gε begegnet der Fläche des Kegels unter C zweymahl in G; g; dieses gibt die beyden Scheitel der Ellipse. (363) Die Parabel hat nur einen Scheitel, (354) weil eG der Fläche des Kegels nicht weiter als in G begegnet. EG aber schneidet eG; und folglich auch DC (G. 12. S. 1. Z.) in einem Puncte, der γ heissen mag; das gibt die beyden Scheitel der Hyperbel G; γ; (392) und die Ebene FGf schneidet in dem entgegengesetzten Kegel CBδ (541) die entgegengesetzte Hyperbel. (404)

558. Zus. Durch einen Punct des Kegels G, lassen sich unzählich viel Ellipsen und Hyperbeln,

aber

aber nur eine Parabel schneiden. Die Ebene, welche eine Parabel durch was für einen Punct G der Seite AB man will, schneiden soll macht mit der Grundfläche einen gegebenen Winkel, der, nachdem man ihn stumpf oder spitzig nimmt, der Neigung der Seiten des Kegels gegen die Grundfläche ABC Ergänzung zu 2 R; oder dieser Neigung selbst gleich ist; Ihr Durchschnitt aber mit der Grundfläche, steht auf der gegebenen Ebene ABC senkrecht, also liegen alle diese Parabeln in parallelen Ebenen, (G. 47. S. 7. Zus. mit der Ergänzung, die ich Gnomon. 21 * angezeigt habe.) und sind daher alle einander ähnlich, (542) und weil man das Dreyeck ABC rings um die Axe AC drehen kann, so kann G jeden Punct des Kegels vorstellen, und so sind alle Parabeln, die sich nur aus einem senkrechten Kegel schneiden lassen, einander ähnlich; womit (388) übereinstimmt. Die Hyperbeln und Ellipsen aber, die durch einen Punct G gehen, sind unähnlich; jeder von ihnen aber lassen sich unzähliche ähnliche parallel schneiden. (542)

559. Zus. Wenn die Puncte F; f 31 Fig. im Umfange der Grundfläche sind, so sind in der Kegelfläche, und zugleich in der Ebene des Schnittes (551) also im Umfange des Schnittes, wofern der Umfang des Schnittes durch alle Puncte der Kegelfläche geht, die in seiner Ebene sind. Nun ist in diesem Umfange auch G 551; der Schnitt wird also so aussehen, wie die 32 F. zeigt. Der Punct E bedeute da die dreyerley Puncte E; e; ε; 31 F. Hier ist ES = t; SM = v; und für v = ○; EF

oder

oder $Ef = \pm\sqrt{(rr - ff)}$. Dieses ist möglich, so lange E; e; ε; 31 F. innerhalb des Umfanges der Grundfläche liegt, und also $f \leqq r$; daher allemahl für die Hyperbel und Parabel (553; 554;) aber für die Ellipse (555) kann ε über der angenommenen Grundfläche des Kegels fallen, da denn diese Grundfläche zwar von der Ebene der Ellipse, aber nicht von ihrem Umfange geschnitten wird. Man begreift daß dieses auf die Grösse von b; und den Winkel BCD ankömmt, man wird eine Fläche senkrecht auf die Axe des Kegels oder mit der angenommenen Grundfläche parallel, allemahl nahe genug bey C führen können, damit den Umfang jeder Ellipse zu schneiden.

560. Anf. Um EG zu finden, setze man (550) t o; dieses giebt (78) r statt m b gesetzt (550)

$$v = \frac{\cos\varphi\, f - \sin\varphi\, mr \pm P}{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 . mm}$$

wo P. P

$= (\cos\varphi . f - \sin\varphi . mr)^2 + (rr - ff).(\cos\varphi^2 - mm.\sin\varphi^2) = (\cos\varphi . r - \sin\varphi . mf)^2$. Also ist der Dividendus dieses Werthes von v

I) $\cos\varphi . f - \sin\varphi\, mr + \cos\varphi . r - \sin\varphi . mf$
$= (\cos\varphi - \sin\varphi . m).(f + r)$

und das untere Zeichen von P gebraucht, kömmt der Dividendus

II) $(\cos\varphi + \sin\varphi . m).(f - r)$.

Nun ist der Divisor $= (\cos.\varphi + \sin\varphi\, m).(\cos\varphi - \sin\varphi, m)$; also der Quotient.

I) $\frac{f + r}{\text{cof. } \varphi + \text{ fin } \varphi . m}$

II) $\frac{f - r}{\text{cof } \varphi - \text{fin } \Phi . m}$

561. Zuf. Der Diviſor dieſer beyden Werthe iſt, das obere Zeichen für I das untere für II gebraucht $= \text{cof} . \left(1 \pm \frac{\text{fin } \Phi}{\text{cof } \Phi} . m\right) = \text{cof } \varphi . (1 \pm \text{tang } \Phi . m) = \text{cof } \Phi . (1 + \text{tang } \Phi . \text{cot } \beta) = \text{cof } \Phi . \text{cot } \beta . \left(\frac{1}{\text{cot } \beta} \pm \text{tang } \Phi\right) = \text{cof } \Phi . \text{cot } \beta . (\text{tang } \beta \pm \text{tang } \Phi)$

562. Zuf. Wie man bisher den Schnitt allemahl durch einen Punct G geführt; ſo führe man ihn nun allemahl durch eine gegebene Linie F f; um die man ſich die ſchneidende Ebene drehen laſſe. So bleibt f unverändert allemahl kleiner als r aber Φ iſt anfangs für die Hyperbel ſpitzig, wird alsdenn für die Parabel $= 2R - \beta$ und für die Ellipſe noch gröſſer. Die Axe, um welche man ſich die ſchneidende Ebene (553) drehen lieſſe, war mit F f parallel, und ein Schnitt durch G mit der Grundfläche parallel, gäbe einen Kreis, deſſen Halbmeſſer ſich zu ſeinem Abſtande vom Scheitel verhielte wie r; b; brauchte man alſo dieſen Kreis ſtatt der Grundfläche; ſo geſchähe in 553 das, was hier in der bisher angenommenen Grundfläche geſchieht.

563.

563. Zus. Für die Hyperbel ist (553) anfangs Φ spitzig, also cos Φ und tang Φ bejaht, auch tang Φ & tang β; folglich der Divisor des zweyten Werth verneint, sein Dividendus auch, also der Werth H selbst bejaht. Nach diesen wird Φ = R also cos Φ = o aber tang Φ = ∞; um zu sehen, was in diesem Falle der Divisor wird, behalte man für ihn den Ausdruck cos Φ ± sin Φ. m dieser wird hier offenbar ± m = ± tang β; also ist der Divisor wiederum für den zweyten Werth verneint, und dieser, Werth selbst bejaht. Wird aber Φ stumpf, so ist cos Φ verneint, aber tang Φ eine grössere verneinte Grösse als tang β; daher tang β + tang Φ verneint, und dieses mit cos Φ. cot β multiplicirt bejaht, also der Werth I bejaht. Ferner tang β — tang β bejaht, und dieses mit cos Φ. cot β multiplicirt verneint, also der Werth II. bejaht. Für die Hyperbel sind also allemahl beyde Werthe bejaht. Ihre Scheitel G; γ; 31 F. liegen nähmlich allezeit beyde über F f.

564. Zus. Für die Parabel ist tang Φ eine verneinte Grösse, die = — tang β (553) Also ist für sie tang β — tang Φ = + 2. tang β und der Divisor des zweyten Werthes ist 2. cos Φ; verneint; also der zweyte Werth bejaht; der erste aber hat zum Divisor cos Φ. cot β. (tang β - tang β) und ist also unendlich. Jener gibt daher den Scheitel der Parabel über EF, dieser zeigt an, daß der andere Scheitel unendlich weit hinausrücke. Dieß ist ein

solcher Fall wie im Anfange von 541. erwähnt worden.

565. Zus. Für die Ellipse ist allemahl Φ stumpf, aber tang Φ eine verneinte Grösse, die kleiner als — tang β (555) also tang β + tang Φ bejaht, welches mit cos Φ. cot β multiplicirt was verneintes gibt, also ist der Divisor des ersten Werthes, und der Werth selbst allemahl verneint; aber der Divisor des zweyten Werthes, ein Product aus der verneinten Grösse cos Φ. cot β in die bejahte tang β — tang Ϛ) daher verneint, und also der zweyte Werth bejaht. Die beyden Scheitel der Ellipse fallen nähmlich bey der Voraussetzung (562) auf entgegengesetzte Seiten der Linie F f.

566. Zus. Man suche die Länge der Axe der Ellipse, oder die Entfernung ihrer Scheitel. Zu dieser Absicht muß man zu dem bejahten Werthe (564) das Entgegengesetzte des Verneinten rechnen. Dieser letzter Werth wird nur deßwegen verneint, weil er die Entfernung eines Scheitels auf der andern Seite von F f bestimmt. Man findet also die Weite dieses Scheitels von dem andern, wenn man den Werth seiner Entfernung bejaht macht, und so zu dem bejahten Werthe der Entfernung des andern addirt. Folglich ist die Weite der Scheitel der Ellipse, oder die Länge ihrer Axe.

$$\frac{f-r}{\text{cof } \Phi.\ \cot \beta.\ (\text{tang } \beta - \text{tang } \Phi) - (f+r)}$$

$$\frac{}{\text{cof } \Phi.\ \cot \beta.\ (\text{tang } \beta + \text{tang } \Phi)}$$

Die Rechnung giebt dieſe Axe

$$\frac{2\,(f.\ \text{tang } \Phi - r.\ \text{tang } \beta)}{\text{cof } \Phi.\ \cot \beta\ (\text{tang } \beta^2 - \text{tang } \Phi^2)}$$

Für die Axe der Hyperbel muß der Unterſchied der beyden Werthe genommen werden. (563)

567. Zuſ. Es ſey EG der zweyte Werth (560) weil ſolcher allemahl bejaht iſt (563 ; 564 ; 565 ;) ; Man nehme EP = MS ; und heiſſe EP = x ; PM = y ſo iſt v = EG — x ; t = y (550) und weil EG einer der Werthe von v in (560) iſt, ſo hat man ($\text{cof } \Phi^2$ - mm. $\text{ſin } \Phi^2$). EG^2 + (ſin Φ. mr - cof Φ. f). 2EG + ff - rr = o ; Setzt man nun in 550 ; EG — x ſtatt v ; und t ſtatt y ; und den zweyten Werth (560) ſtatt EG ; ſo bekömmt man

$$yy = 2.\ (\text{cof } \Phi.\ r - \text{ſin } \Phi.\ mf).\ x. - (\text{cof } \Phi^2 - mm\ \text{ſin } \Phi^2)\ xx.$$

Eine Gleichung wie eine von den dreyen 389 ; 362 ; 349 ; nach den drey verſchiedenen Fällen, die für den Coefficienten von xx können angenommen werden. (550)

568. Zuſ. Die drey erwähnten Gleichungen laſſen ſich ſo allgemein ausdrücken, $yy = Px + Qxx$

wo P der Parameter, und Q der Quotient des Parameters mit der Axe dividirt ist. Für die Hyperbel ist dieser Quotient verneint, also hat die Axe da einen verneinten Werth (390). Folglich ist hier der Parameter oder

$$P = 2.(\cos\phi.\, r - \sin\phi.\, m.\, f)$$

und P : Q oder die Axe =

$$\frac{2.(\cos\phi.\, r - \sin\phi.\, m\, f)}{-(\cos\phi^2 - m\, m\, \sin\phi^2)}$$

woraus cot β statt m; und teng ϕ statt $\sin\phi$: $\cos\phi$ gesetzt, eben der vorige Ausdruck (566) folgt.

569. Anm. Die Weitläuftigkeit, in welche man schon bey dem senkrechten Kegel geräth, wird mich rechtfertigen, daß ich mich begnüge nur an demselben zu zeigen, daß die Kegelschnitte krumme Linien der zweyten Ordnung sind. Diese Untersuchung ist wie alles von 514; an aus dem Anhange v. Herrn Eulers Introd. in analyf. infin. wo 69. u. f. §. die Schnitte des schiefen Kegels betrachtet werden, welches bey eben dem Verfahren, nur eine weitläuftigere Rechnung erfodert.

570. Anm. Auch krumme Flächen können einander schneiden, wie eine Kugel einen Kegel (Astr. 302.) da ist denn der Schnitt meistens eine krumme Linie, deren Theile nicht alle in einer Ebene liegen, sondern immer aus einer Ebene in eine andere kommen. Er krümmt sich also doppelt, in Absicht auf die Lage der Theile selbst gegen einander, und in Absicht auf eine bestimmte Ebene, z. E. die Grundfläche. (516) Seine orthographische Projection auf die Grundfläche ist eine krumme Linie, und seine Puncte liegen über dieser Projection, nicht in einer Ebene, sondern selbst in einer krummen Fläche. Ein Schraubengang (Mech. 106.)

106.) ist eine solche Linie. S. Clairaut; des courbes à double courbure. Eine Spur von der Art die Natur der Flächen, so wie hier geschehen ist, zu bestimmen, findet sich beym Pappus VII B. 235 Satz; und selbst der Nahme: locus ad superficiem, dessen Bedeutung aus 497 mit 516 verglichen leicht zu errathen ist. Zum Unglücke ist die Stelle gleich verderbt, und deßwegen undeutlich. Uebrigens kommen in practischen Theilen der Mathematik viel Fälle vor, wo diese Untersuchungen von den Flächen und ihren Schnitten angewandt werden können. Die perspectivische Vorstellung eines ebenen Gegenstandes; ist der Schnitt der Tafel mit einer Art von Kegel, dessen Spitze das Auge, die Grundfläche der Gegenstand ist. (Persp. 5.) Eine weitläuftige Anwendung solcher Untersuchungen auf die Gewölber hat Frezier gemacht; S. dessen Theorie & Pratique de la coupe des pierres & des bois pour la construction des Voutes &c.

Von den transcendentischen krummen Linien.

571. Erkl. Wenn eine Grösse y durch x so bestimmt wird, daß sich zwischen beyden keine algebraische Gleichung geben läßt, so heißt y eine transcendentische Function von x. (323)

572. Zus. Wofern zwischen zwo Grössen x; y; eine algebraische Gleichung statt findet, so gehöret zu jedem x eine bestimmte Menge von y; soviel nähmlich als y in der Gleichung Abmessungen hat. (328) Kann man also erweisen, daß zu einem x eine grössere Menge von y als deren Zahl man angeben

könnte, unzählich viel y gehören, so ist y eine transcendentische Function von x; Und umgekehrt, wenn y eine transcendentische Function von x ist, so gehören zu jedem x unzählich viel y. Gehörten zu jedem x eine bestimmte Menge, so müßte sich solches durch eine algebraische Gleichung zwischen beyden angeben lassen, die nicht höher als auf den Grad dieser Menge steigen könnte.

573. Zus. Eine Gleichung zwischen x und y müßte also unzählich viel Abmessungen haben, dergleichen wäre etwa $x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 \ldots$. wo die Reihe ohne Ende fortgehen müßte.

574. Anm. Man kann eine algebraische Function durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Wie z. E. den Quotienten von $\frac{1}{1-x}$ (7) der ohne Zweifel eine algebraische Function von x ist. Heißt er q; so ist die algebraische Gleichung zwischen beyden $1 = q; -qx$; blos alsdenn erfodert er eine unendliche Reihe, wenn man ihn durch lauter Potenzen von x deren Exponenten ganze bejahte Zahlen sind, ausdrücken will. Aber eine transcendentische Function erfodert allemahl eine unendliche Reihe. Etwas ähnliches findet sich Ar. IIII. 26. Manche rationale Brüche erfodern, wenn sie in Decimaltheilen ausgedruckt werden sollen, eine unendliche Theilung der Einheit; Irrationalzahlen erfodern eine solche Theilung allemahl.

574. Erkl. Eine Linie heißt transcendentisch, wenn ihre Puncte durch transcendentische Functionen bestimmt werden.

575.

575. Zus. Nimmt man für sie Coordinaten, (331) so kann die Ordinate keine algebraische Function der Abscisse seyn. Sie muß aber gleichwohl durch die Abscisse gegeben seyn, wenn alle Puncte der krummen Linie nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gegeben sind: Sie ist also eine transcendentische Function der Abscisse, und es giebt für eine Abscisse unzählich viel Ordinaten. (572) darunter vielleicht unmögliche sind.

576. Zus. Eine transcendentische Linie ist als eine krumme Linie von einer höhern Ordnung als alle Ordnungen, die sich angeben lassen, von einer unendlichen Ordnung anzusehen. (465) Sie kann also von einer geraden Linie in unzählich viel Puncten geschnitten werden, (492) wie auch aus 575 erhellet.

577. Zus. Umgekehrt; wenn man von einer krummen Linie aus ihrer Erklärung erweisen kann, daß sie sich von einer geraden Linie in unzählich viel Puncten schneiden läßt, so ist diese Linie transcendentisch. (492)

578. Erkl. In der 33 F. sey ein Kreis mit dem Halbmesser CA = r beschrieben, sein Umfang heisse = p. Von der Linie CA an, deren Lage ungeändert bleibt, nehme man einen willkührlichen Winkel ACP; uud auf dessen Schenkel CP; die Länge CM so daß 4R: ACP = CA: CM; so ist der Punct M in der Archimedischen Schneckenlinie oder Spirallinie: (spiralis *vel* helix.)

579. **Anm.** Archimedes hat nähmlich diese Schneckenlinie in einem besondern Buche betrachtet.

580. **Zus.** Man nenne CM = y; den Bogen AP = x; so ist p: x = r: y oder py = rx eine Gleichung für die Schneckenlinie, wo aber die Coordinaten nicht, wie bisher gewöhnlich war, beschaffen sind.

581. **Zus.** Für x = o; ist y = o; So lange x kleiner als p; ist y < r also M innerhalb des Kreises: für x = p oder wenn der Bogen AP sich in die Peripherie APQA verwandelt, ist y = r; und der Punct M fällt in A; daß also CMNA die Spirallinie für den ganzen Umkreis ist.

590. **Erkl.** Eine Linie CP drehet sich mit gleichförmiger Winkelbewegung (motu angulari vniformi;) so nähmlich, daß sie in gleichen Zeiten ihre Lage um gleiche Winkel verändert; oder daß wofern sie gleich lange Zeiten braucht, aus der Lage CA in CP; und aus der CP in CQ zu kommen, die Winkel ACP = PCQ; Ein Punct aber bewegt sich auf einer Linie gleichförmig, wenn er auf ihr in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibet. So wird sich P durch den Umfang des gegebenen Kreises gleichförmig bewegen, indem sich CP gleichförmig dreht.

591. **Zus.** Wenn zwo Zeiten T; t; die beyden in ihnen beschriebenen Winkel oder Räume S; s; heissen, so ist T: t = S: s; denn man kann allemahl eine Zeit annehmen, welche die beyden Zeiten T; t;

mißt; Sie sey in T; m mahl, in t; n mahl enthalten, so ist (§. 24. S. 1. Z.) der Winkel oder Raum, der während dieses Maasses beschrieben wird, in S; m mahl; in s; n mahl enthalten, also T : t = m : n = S : s

592. Zus. Die Linie CA drehe sich von der ersten Lage CA an mit gleichförmiger Winkelbewegung; auf dieser Linie, die sich so dreht, bewege sich ein Punct von C aus gleichförmig mit derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher er die Länge CA durchlaufen kann, in dem sich die Linie durch 4R gedrehet hat; so ist M seine Lage auf CP; denn wenn die Zeit des ganzen Umlaufes, oder des Weges durch CA = T; die Zeit, in welcher der Winkel ACP beschrieben wird, t heißt, so ist T : t = p : x; Aber auch r : CM = p : x (180; also r : y = T : t, wie nach 591 seyn soll.

593. Zus. Nachdem die Linie CA ihren Umlauf vollendet hat, kann sie sich noch weiter drehen. Wenn sie so das zweytemahl in die Lage CP kömmt, so ist der Winkel, den sie solchergestalt von der ersten Lage CA an beschrieben hat, = 4R + ACP; und sein Maaß; der ihm zugehörige Bogen, von AC an, den ganzen Umkreis herum und bis wieder in P genommen = p + x; der Punct kann bey diesem fortgesetzten Drehen seine Bewegung über die Länge des Halbmessers hinaus, ebenfalls fortsetzen, und also nun in 2 M seyn, daß p : p + x = r : C2M oder C2M = r. (p + x) : p = r + rx : p =

$p = r + CM$; Nach Vollendung des zweyten Umlaufs, kann der Umlauf zum drittenmahle wiederhohlt werden, wenn die Linie zum drittenmahle in die Lage CP kömmt, hat sie von ihrer ersten Lage an den Winkel 2. $4R + ACP$; beschrieben, und der zugehörige Bogen, ist $2p + x$ folglich befindet sich der Punct, der auf dem Halbmesser fortgeht, in $3M$ daß $C_3M = r.(2p + x) : p$ oder $= 2r + CM$; und so erhellt, daß dieser bewegliche Punct um die Länge $n.r + CM$ von C entfernt seyn wird, wenn die Linie nach n vollendeten Umläufen, das $n + 1$te mahl in die Lage CP kömmt, und n kann so groß als man will, oder unendlich werden; Es giebt also in einer Linie CP unzählich viel Puncte M; 2M; 3M; u. s. w.

594. Erkl. Was von der Spirallinie, bey dem ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Umlaufe des Halbmessers beschrieben wird; heiß die erste; zweyte; dritte; u. s. w. Spirallinie; so hat sich Archimedes ausgedrückt. Eigentlich ist es von einer Spirallinie der erste, zweyte, dritte, u. s. w. Theil.

595. Zus. Die Spirallinie ist eine transcendentiche Linie. (593; 577;)

596. Zus. Man könnte zwischen den Geschwindigkeiten der Puncte P und M (590) oder zwischen x und y eine andere Verhältniß als die p : r (592) annehmen, z. E. man könnte seßen $\sqrt[m]{r^n} : \sqrt[m]{p^n} = y : x$ dieses gäbe $r^n x^m = p^n y^m$ eine Gleichung, welche

welche unzählich viel andere Spirallinien enthielte. So könnte man annehmen r x = m p y; dieses gäbe eine Spirallinie, welche bey Vollendung des ersten Umlaufs die Linie CA in der Weite r : m vom Mittelpuncte schnitte.

597. Erkl. Ein Kreis BObo 34 F. wälzt sich auf der graden Linie AH von A nach H dergestalt, daß alle Theile seines Umfangs nach und nach alle Theile der Linie AH decken, so daß wenn anfangs des Kreises Punct B auf A; und nach diesem sein Punct D auf T fällt, die gerade Linie AT, des Bogens BOD Länge gleich ist: da alsdenn B in P kömmt, und folglich TKP = DGB. Unter diesen Umständen beschreibt der gegebene Punct B im Umfange des Kreises, die Radlinie (Cyclois) APF.

598. Anm. Ein Nagel B in einem Rade BObo würde eine solche Linie beschreiben, indem das Rad auf einem ebenen Wege fortgeführet würde; daher ist der deutsche Nahme, so wie der französische *roulette* entstanden.

599. Zus. Der Bogen BD; welcher in dem mit GB beschriebenen Kreise, des Winkels BGD Maaß ist, ist also der graden Linie B'Γ gleich.

600. Zus. Wenn man um G mit einem kleinern Halbmesser Gβ = Gδ einen Kreis beschriebe, so wäre der Bogen βδ der in ihm des Winkels BGD Maaß ist, nicht so lang als der Bogen BD; Aber wenn sich der grosse Kreis wälzt, so wälzt sich der kleine concentrische auch mit, und wenn beyder

Kreis-

Kreise gemeinschaftlicher Mittelpunct in K kömmt, kommen δ und D zugleich über T in die Linie KT, und von einer Linie, die durch β mit AT parallel ginge, wird ein Stück = AT zwischen GA; KT enthalten seyn. Auf diesem Stücke der Parallele hat sich aber der kleine Kreis fortgewälzt, in dem der grosse sich auf AT fortgewälzt hat. Ist AT also dem Bogen des grossen gleich, so ist die ihr gleiche Parallele mit AT, grösser als der ähnliche Bogen des kleinern, und folglich hat sich dieser Bogen auf einer Linie fortgewälzt, die seiner Länge nicht gleich ist. Eben so bekömmt man einen ähnlichen concentrischen Bogen, wenn man aus G mit einem grössern Halbmesser einen Kreis beschreibt, und dieser Bogen wälzt sich mit BD zugleich auf einer Linie fort, die der AT parallel und gleich, also kleiner als er ist. Dieser Ursache wegen war nöthig, die Bedingung (597) ausdrücklich zu erwähnen.

601. Anm. Vom Aristoteles an, der die scheinbare Schwürigkeit (600) schon in s. 24. mechan. Frage, bemerkt hat, haben sich die Mathematikverständige solche zu heben bemüht. Hier wird es genug seyn, zu erinnern, daß es auf den Begriff des Wälzens ankömmt. Wird die Bedingung (597) dazu erfodert, so kann sich unter allen concentrischen Kreisen nur einer wälzen, und es ist willkührlich, welcher solches thun soll. Von den übrigen ähnlichen Bogen, fallen zwar alle Puncte nach und nach auf alle Puncte von Linien, die der AT parallel und gleich sind, aber das beweist die Gleichheit nicht, weil die Linien nicht Summen von Puncten sind, (G. 5. Erkl.) und ähnliche

liche Bogen concentrischer Kreise gleichviel Puncte haben, indem sich durch jedem Punct des einen, ein Halbmesser ziehen läßt, der einen Punct des andern angiebt. Man kann sich zur Erläuterung, reguläre Vielecke von einer Art z. E. reguläre Sechsecke vorstellen, die um einen Mittelpunct, eins innerhalb des andern verzeichnet sind: Wenn sich nun das äuserste, auf einer geraden Linie so wälzt, daß seine Seiten eine nach der andern Theile der geraden Linie decken, so werden diese Theile zusammen hängen, und wenn sich das ganze Vieleck herumgewälzt hat, wird es eine Länge auf der Linie bedekt haben, die seinen Umfange gleich ist. Aber zu gleicher Zeit, wird sich ein concentrisches, kleineres Vieleck, auf einer Parallele mit jener Linie dergestalt wälzen, daß die Theile dieser Linie welche seine Seiten nach einander bedecken, nicht zusammen hängen; Wenn es sich ganz herumgewälzt hat, welches mit den äusern Vielecke zugleich geschehen ist, isi es auf seiner Parallele, über eben die Länge gegangen, über welche das äussere auf seiner Linie gegangen ist, aber es hat auf dieser Länge mit seinen Seiten nicht alles bedeckt, sondern nur Theile die nicht zusammen hingen; die Summe dieser Theile, macht den Umfang des kleinen Vielecks aus. Wenn man sich solche Vielecke immer von mehr und mehr Seiten vorstellt, so nähern sie sich dem Kreise, und so läßt sich hiedurch diese Schwierigkeit erläutern. Auf diese Art hat schon Galiläus die Sache betrachtet: discorsi intorno a due nuové scienze dial. 1; pag. 22. Tacquet in diss. de circulor. volutionibus bey seinen cylindricis und annularibus, hat ihn unglücklich getadelt.

602. Erkl. Der Kreis BObo heißt der beschreibende Kreis, (circulus generator) B der beschreibende Punct (punct. describens) AH die Grundlinie.

603. Aufg. Wenn der Halbmesser GB = r und die Länge AT gegeben ist, den ihm zugehörigen Winkel BGD (597) zu firden.

Aufl. Es sey $\frac{1}{2} : \pi$ die Verhältniß des Halbmessers zum Umkreise, also des beschreibenden Kreises Umfang, $2\pi r$; AT = u dem Bogen AD; so ist

$u : 2\pi r = AGD : 4R$ oder $\frac{2R.\ u}{\pi r} = AGD =$ PKT (597).

604. Zus. Für jede Stelle des Mittelpunctes K; ist u; also die Stelle von P gegeben, wenn man nur weiß, was für ein Winkel in einem gegebenen Kreise, einen Bogen von gegebener Länge zugehört, welches also mit der Quadratur des Kreises zusammenhängt. (S. 44. S. 7. Z.)

605. Zus. Für $u = \pi r$ ist $AGD = 2R$ oder wenn $AE = \pi r$ so ist des beschreibenden Punctes Stelle F. Der Halbkreis ELF ist alsdenn, was in der ersten Lage der Halbkreis bOB war, nähmlich b ist unten in E und B oben in F gekommen.

607. Zus. Durch einen willkührlichen Punct der Radlinie P; ziehe man PM mit AH parallel, die des beschreibenden Kreises Durchmesser über T und E; in N und M schneide. So ist AE = dem Bogen BoDb = dem halben Umfange; und AT = dem Bogen BoD = dem Bogen TP (597) = dem Bogen LE; also AE — AT oder TE = dem Bogen

gen (ELF — EL) = dem Bogen LF; Aber TE = PM — PN = PM — ML = PL;

608. Zus. Hieraus fließt folgende Art die Radliuie zu beschreiben: AE sey dem halben Umfange des beschreibenden Kreises gleich; und EF, auf AS senkrecht sein Durchmesser. Man beschreibe nach A zu, seine Hälfte FLE; durch den Endpunct L des willkührlich angenommenen Bogens ziehe man LP der EA parallel, und dem Bogen FL gleich, so ist P in der Radlinie.

609. Zus. Eben das mit des Kreises um FE anderer Hälfte gemacht, gibt auf der andern Seite einen Bogen der Radlinie, welcher dem Bogen APF gleich und ähnlich ist.

610. Zus. Wenn FL = x; LP = y; so ist y = x die Gleichung für die Radlinie.

611. Zus. So sey 35 Fig. das Stück A F 2 A der Radlinie beschrieben. Hier befindet sich nun der Krcis bey 2 A völlig in einer solchen Lage, wie die war, in der er sich bey A befand; Also wird auf eben die Art ein neues gleiches und ähnliches Stück 2 A 2 F 3 A; und nach diesem wieder ein solches 3 A 3 F 4 A u. s. w. beschrieben werden, welches ohne Ende fortgeht, weil sich der Kreis auf der Grundlinie ohne Ende fortwälzen kann. Er könnte sich auch von A rückwärts wälzen. So besteht die Radlinie aus unzählich vielen ähnlichen und

gleichen Stücken, und wird also von der Grundlinie, und von Parallelen mit der Grundlinie, die näher als die Weite 2r beträgt, bey ihr sind, in unzählich viel Puncten geschnitten. Sie ist also eine transcendentische Linie (577).

612. Lehrs. Zu der einzigen Sehne HM 5 K. gehören unzählich viel Bogen.

Bew. Jeder Bogen, dessen Endpuncte H und M sind, gehört zu dieser Sehne. Der kleinste Bogen, der ihr zugehört, HLM; heisse u; und der Umfang P; so gehören zu der Sehne HM; folgende Bogen: HLM; HLMNHLM = u + P; HLMNHLMNLM = u + 2P u. s. w. wenn man nähmlich zu dem Bogen HLM; den Umkreis MNHLM einmahl, zweymahl u. s. w. addirt, so bekömmt man jedesmahl einen Bogen, der sich in H anfängt, und in M aufhört. Also gehört zu der Sehne HM folgende Reihe von Bogen

u; u + P; u + 2P. . . u + nP

wo n jede ganze bejahte Zahl; so groß als man will seyn kan, daß sich also die Zahl der Glieder dieser Reihe nicht angeben läßt;

Ferner gehört HM als Sehne zu den Bogen HNM = P — u; und HNMLHNM = 2P — u; u. s. w. zu allen Bogen

P - u; 2P - u; 3P - u; . . . . nP - u;

aber ob gleich der Grösse nach einerley Sehne zu allen diesen Bogen gehört, so gehört doch diese Sehne nicht zu allen Bogen mit einerley Zeichen.

Man

Man lasse sich eine Sehne um den Punct H von M nach N zu drehen, so wächst sie anfangs immer mit ihrem Bogen; bis sie für den Halbkreis, dem Durchmesser gleich wird. Nach diesem fängt sie an abzunehmen, obgleich ihr Bogen von H durch LMN gerechnet, immer grösser wird, und wird = ○ wenn ihr Bogen HLMNH dem Umfange gleich wird. Dreht sie sich alsdenn weiter und kömmt auf der andern Seite der Linie HM in Lagen, wie HL eine ist; so sind ihre Werthe verneint, weil eine bejahte Grösse, die nach einer beständigen Abnahme durch ○ geht, verneint wird, (§. 12. §. 14. 3) unter diesen verneinten Werthen bekömmt sie auch den — HM; wenn sie wieder in die Lage HM kömmt, und also ist — HM die Sehne von u + P; Man lasse sich die Sehne immer so weiter um H drehen, und bemerke, daß jeder Durchgang durch ○ ein Uebergang in das Entgegengesetzte ist, so wird ihr anderer Endpunct den Bogen HMNH das zweytemahl durchlaufen, also wird sie das zweytemahl = ○ und nach diesem Durchgange wieder bejaht werden, also + HM die Sehne von u + 2P jeyn; und so gehört abwechselnd die Sehne

+ HM zu u; u + 2P; .... u + 2nP

— HM zu u + P; u + 3P; .... u + (2n+1)P

Und weil erwiesenermassen jeder Zusatz eines neuen Umkreises, bey der Sehne einen Durchgang durch ○ und einen Uebergang in das Entgegengesetzte verursacht, so gehört

$+ HM$ zu $P-u$; $3P-u$; .... $(2n+1)P-u$;
$- HM$ zu $2P-u$; $4P-u$; .... $2nP-u$

In diesen vier Reihen sind alle Bogen enthalten, die zu der bejahten oder verneinten Sehne HM gehören.

613. Lehrs. Zu jedem Sinus gehören unzählich viel Bogen.

Bew. L; M; seyn die Endpuncte eines Bogens; 5 F. Auf den Halbmesser OL fälle man das Perpendikel ME; dieses ist sein Sinus; (Trig. 2. Erkl.) Nun erhellt schon aus (612) daß unzählich viel Bogen die Endpuncte L; M; haben; Um aber genauer zu bestimmen, für welche von diesen Bogen der Sinus ME bejaht oder verneint gehört, sey der kleinste Bogen, der diesem Sinus zugehört, $LM = w$; Wenn man zu einem Bogen den halben Umkreis addirt, so ist der Sinus der Summe dem Sinus des Bogens entgegengesetzt und gleich; welches aus Trig. 2. Erkl. 4. Zus. allgemein erhellt; also gehört

$+ ME$ zu w; $w+P$; $w+2P$; ... $w+nP$;
$- ME$ zu $w+\frac{1}{2}P$; $w+\frac{3}{2}P$; ... $w+\frac{2n-1}{2}P$;

auch

$+ ME$ zu $\frac{1}{2}P-w$; $\frac{3}{2}P-w$; ..... $\frac{2n-1}{2}P-w$;
$- ME$ zu $P-w$; $2P-w$; ..... $nP-w$

Hier kann n jede ganze Zahl bedeuten, und so gehören

hören zu jedem Sinus, bejaht oder verneint genommen, unzählich viel Bogen.

614. Zus. Eben so gehören zu jedem Cosinus; jeder Tangente, Contangente, Secante u. s. w. unzählich viel Bogen.

615. Anm. Hierauf beruht der Grund, warum jede Art einen Winkel in m Theile zu theilen, auf eine Gleichung von m Abmessungen führt; und warum man also durch die gemeine Geometrie weder einen Winkel in so viel Theile als man will theilen, noch jedes ordentliche Vieleck beschreiben kann. S. die (170) angeführte Schrift.

616. Lehrs. Zwischen dem Sinus EM und seinem Bogen LM; oder der Sehne HM und ihrem Bogen HLM läßt sich keine algebraische Gleichung finden.

Bew. Sonst gäbe es für einen Sinus, oder für eine Sehne soviel Bogen, soviel Abmessungen der Bogen in dieser Gleichung hätte. Es gibt ihrer aber unzählich viel (605: 612;)

617. Zus. Der Bogen ist eine transcendentische Function des Sinus oder der Sehne (572)

618. Zus. Imgleichen des Cosinus; der Tangente, u. s. w. (614)

619. Anm. Wenn man nähmlich den Bogen LM daraus, daß ME sein Sinus ist, bestimmen wollte, so nähme man von diesem Bogen nichts an, das nicht

unzählich viel andern eben so zukömmt. Was man also aus dieser Bestimmung herausbringt, muß alle diese unzählichen Bogen zugleich enthalten. Man fragt wirklich nach unzählich viel Dingen auch wenn man nur nach einem einzigen zu fragen glaubte, (s. 242.) denn ob man gleich vielleicht nur an den kleinsten Bogen LN denkt, so bringt man doch nichts in die Untersuchung, das ihm allein, und nicht auch den andern zugehörte.

620. Zus. Jedem zum Sinus + ME gehörigen Bogen, gehört ein Ausschnitt wie LOM zu, also gibt es keine algebraische Gleichung zwischen jedem unbestimmten Sinus EM; und dem ihm zugehörigen Sector LOM; und eben so nicht zwischen jeder Sehne HM und ihrem Ausschnitte HLMO; oder ihrem Abschnitte HLM.

621. Zus. In diesem Verstande sagt man, die unbestimmte Quadratur oder Rectification des Kreises (quadratura indefinita) sey unmöglich; Es lasse sich nähmlich keine algebraische Gleichung finden, welche jedes Stück des gegebenen Kreises LMO; oder LEM; das durch den Ausschnitt und das Dreyeck EOM gegeben wäre, (G. 44. S. 8. Z.) oder jeden Bogen dieses Kreises LM; durch den zugehörigen Sinus EM; oder Quersinus LE (der durch ME gegeben ist (Trig. 3. Erkl. 1. Zus.) bestimmte; Ob aber nicht möglich sey, eine algebraische Vergleichung zwischen einem gewissen bestimmten Bogen, und seinem Sinus, seiner Tangente, u. s. w. zu finden; davon läßt sich nichts ent-

entscheiden, wiewohl man doch dergleichen bisher noch nicht gefunden hat. S. Euler Introd. ad analyſ. inf. L. II. §. 540. Gegenwärtiges dient S. 44. S. 3. Anm. zu erläutern.

622. Anm. Die Verzeichnung aller Puncte der Spirallinie (580) und der Radlinie (603) ſetzt die unbestimmte Rectification des Kreiſes zum voraus; daher ſind dieſe Linien transcendentiſch. Ueberhaupt ſieht man hieraus, wie eine Menge transcendentiſcher Linien möglich iſt, deren Verzeichnung auf der unbestimmten Quadratur oder Rectification des Kreiſes beruht.

623. Anm. Auſer ſolchen transcendentiſchen Linien giebt es noch andere, von denen ich alsdenn Exempel beybringen will, wenn ich ihre Eigenſchaften in der gehörigen Vollſtändigkeit und Verbindung abhandeln kann.

Von Ausdrückung der Functionen durch unendliche Reihen.

624. Lehrſ. Es ſey $o = a + bz + cz^2 + dz^3 \ldots$. (P) oder die Gleichung P enthalte lauter Potenzen von z, deren Exponenten bejahte ganze Zahlen ſind. Dieſe Potenzen mögen ſo ohne Ende fortgehen, oder nur bis auf eine gewiſſe ſteigen. Soll nun z eine veränderliche Gröſſe bleiben, für die man entweder alle mögliche Gröſſen ſetzen kann, oder die man wenigſtens ſo klein als man

will annehmen, und also auch o statt ihrer setzen darf, so ist $a = o$; $b = o$; $c = o$; u. s. w. oder alle Coefficienten sind $= o$;

Beweis. Denn wenn $z = o$; so fallen alle Glieder bis auf das erste weg, also ist $a = o$; folglich $o = bz + cz^2 + dz^3 \ldots$ wo man mit z dividiren kann, und $o = b + cz + dz^2 \ldots$ erhält, wo $z = o$ gesetzt wieder $b = o$ giebt. Also ist nun $o = cz + dz^2 \ldots$ oder mit z dividirt $o = c + dz \ldots$ wo $z = o$ gesetzt $c = o$ gibt. Also ist $o = dz + \ldots$ und mit z dividirt; $o = d + \ldots$ und z in den folgenden Gliedern $= o$ gesetzt; $d = o$; u. s. w. Jeder Coefficient wird nähmlich zum ersten, weil alle vorhergehenden $= o$ werden, und so gilt von jedem, was vom ersten erwiesen wurde, daß er $= o$ war.

Anderer Beweis. Wenn die Coefficienten nicht o sind, und die Potenzen nicht ohne Ende fortgehen, so hat die Gleichung P nur soviel Wurzeln als sie Abmessungen hat, und daher kann man statt z nicht was man will, sondern nur eine der Wurzeln setzen, Gehen sie ohne Ende fort, so hat zwar P unzählich viel Wurzeln wie 573 wenn dorten $x = o$; aber doch kann man statt z nicht alle mögliche Grössen, und besonders nicht so kleine, als man will, setzen. Also muß die Ursache, warum die Gleichung für jeden Werth von z richtig bleibt, nicht in dem Werthe von z; sondern in den Coefficienten zu suchen seyn, d. i. jeder von ihnen muß $= o$ seyn.

Der

Der hier gegebene Ausdruck einer Reihe ist nicht der allgemeinste. Sie könnte nähmlich $o = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d}$. seyn, und da fragte es sich, ob die Coefficienten auch jeder $= o$ seyn müßten, wenn unter den Exponenten verneinte und gebrochne Zahlen vorkämen. Es ist aber $o = A + Bx^d + Cx^{2d}$ .... Ist hier d bejaht, wenn es auch gleich eine gebrochene Zahl wäre, so kann man $x^d = z$ setzen, und der Beweis läßt sich hier anbringen.

Ist aber d verneint, z. E. $= -e$; so setze man $\frac{1}{x} = y$ also $o = A + By^e + Cy^{2e}$ ...

Da nun x eine veränderliche Grösse ist, so kann es so groß werden als man will, und folglich y so klein als man will, daher sich wieder der Beweis anbringen läßt.

625. Aufg. Die Quadratwurzel von $1 + x$ durch eine unendliche Reihe zu finden.

Aufl. Man setze $\sqrt{(1+x)} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ .... also

$$1 + x = 1 + \left.\begin{matrix} 2Ax \\ +AA \\ +2B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2AB \\ +2C \end{matrix}\right\} x^3$$

$$+\left.\begin{matrix} BB \\ +2AC \\ +2D \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2BC \\ +2AD \\ +2E \end{matrix}\right\} x^5 \ldots$$

Wenn man hier alles auf eine Seite schafft, so sieht die Gleichung so aus: $o = o + 2Ax - 1$ u. s. w. die folgenden bleiben alle wie vorhin.

Also ist nach (624) $2A - 1 = o$; $A = \frac{1}{2}$; und diesen Werth in dem nächsten Coefficienten gebraucht; $\frac{1}{4} + 2B = o$; $B = -\frac{1}{8}$; und diese beyden gefundenen Werthe im nächsten Coefficienten gebraucht; $-\frac{1}{8} + 2C = o$; $C = \frac{1}{16}$; und im nächsten $\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + 2D = o$ oder $D = -\frac{5}{128}$; und im nächsten $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + 2E = o$; $E = \frac{7}{256}$; also $\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5$ ... welche Reihe sich desto schneller nähert, je kleiner der eigentliche Bruch x ist; die Coefficienten, nebst dem nächsten F; welcher $\frac{21}{1024}$ ist, sind auf Decimaltheile gebracht $1 + 0,5x - 0,0125x^2 + 0,0625x^3 - 0,0390625.x^4 + 0,02734375x^5 - 0,0205078125x^6$ u. s. w.

626. Ex. Es sey $x = o,1$ oder man suche $\sqrt{1,1}$ so sind die bejahten Glieder

1,
0,05
0,0000625
0,0000002734375

1,0500627734375

die

die verneinten

— 0, 000125
— 0, 00000390625
— 0, 00000002050 ...

— 0, 00012892
+ 1, 05006277

+ 1, 04993385

Die Zifern können nur bis auf die achte Decimalstelle richtig seyn, weil sich das letzte Glied der berechneten in dieser Stelle anfängt, das folgende wird sich also vermuthlich eine Stelle niedriger anfangen. In der That findet man durch fortgesetzte Rechnung, oder auf andere Art, den folgenden Coefficienten $= \frac{21}{1024} \cdot - \frac{4}{14}$ dessen erste Zifer 0, 01 ist, daher sich das nächste Glied des Exempels in der neunten Decimalstelle anfangen wird. Auch können die letzten unter den Zifern, die man bis auf acht Stellen gefunden hat, unrichtig seyn, weil die Addition Zifern in höhere Stellen geben kann.

Die Ursache, warum sich diese Reihe etwas langsam nähert, ist offenbahr, weil die Coefficienten nur sehr wenig abnehmen.

627. I Für eine Wurzel, oder eine Potenz, deren Exponent ein bejohter Bruch ist, läßt sich eine Reihe folgender Gestalt finden: Man setze.

$$(z + e)^{\frac{m}{n}} = z^{\frac{m}{n}} + A e z^{\frac{m}{n}-1} \; B e^2 z^{\frac{m}{n}-2}$$

und

und nenne die Reihe rechter Hand ⊙, wo die Coefficienten A; B; . . . zu bestimmen sind; m und n sind ganze bejahte Zahlen, also läßt sich der binomische Lehrsatz hier anbringen (141). Also ist $(z + e)^m$ der Potenz n dieser Reihe gleich. Diese Potenz aber ist $= \left(z^{\frac{m}{n}} + Aez^{\frac{m}{n}-1} \right)^n$

$$+ n. \left(z^{\frac{m}{n}} + Aez^{\frac{m}{n}-1} \right)^{n-1} Be^2 z^{\frac{m}{n}-2}$$

u. s. w. wenn man die folgenden Glieder der Reihe ⊙ dazu nehmen wollte. Man sieht nähmlich allemahl eine gewisse Menge von Gliedern zusammen als das a in der Formel 141; und das nächstfolgende Glied als b an (152). Aus dem, was ich hergesetzt habe, finden sich die ersten Glieder dieser Potenz

$$z^m + nAez^{m-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} AAe^2 z^{m-2} + n.B$$

Die ersten Glieder von $(z + e)^m$ aber sind

$$z^m + mez^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 z^{m-2} \ldots$$

Man setze also die Coefficienten der Glieder in beyden Reihen gleich, die einerley Exponenten haben; dieses ist soviel, als hätte man beyde Reihen auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht, daß auf der andern o stünde, da denn der Coefficient

bey

bey einer gewissen Potenz von z, in der einen Reihe von den Coefficienten bey eben der Potenz in der andern Reihe abgezogen würde, beyde aber zusammen sich aufheben müßten. (624)

So findet man $nA = m$; und $A = \frac{m}{n}$;

$\frac{n.(n-1)}{1.2} AA + nB = \frac{m.(m-1)}{1.2}$ und $B = \frac{\frac{m}{n}.\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.2}$

Wenn man die Rechnung weiter fortsetzt so kommen in der Reihe ⊖ Coefficienten eben so heraus, wie sie herausgekommen seyn würden, wenn man in 141. statt des Exponenten den Bruch $\frac{m}{n}$ gesetzt hätte. Aber dieses kann durch das vorhergehende Verfahren, welches sich beym Clairaut Alg. IIII. Th. 54. §. findet, nicht allgemein bewiesen werden. Denn die folgenden Coefficienten der Potenz n der Reihe ⊙ werden immer mehr und mehr zusammengesetzt, und erfodern eine weitläuftigere Rechnung, daß dieses Verfahren weiter nichts als eine algebraische Muthmassung giebt, daß die folgenden Coefficienten der Reihe ⊖ eben das Gesetz beobachten werden, das man bey den ersten, so weit sich diese Rechnung treiben läßt, wahrnimmt.

Nimmt

Nimmt man an, die Reihe ⊙ lasse sich nach 141 finden, wenn man statt des dortigen Exponenten den Bruch $\frac{m}{n}$ setzt, so erhellt zugleich ein wichtiger Unterschied unter der Reihe 141 und der gegenwärtigen; Jene nähmlich hatte nur ein Glied mehr als der Exponent Einheiten hatte, (145) diese aber geht ohne Ende fort, weil die ganzen Zahlen 1; 2; 3; u. s. w. von einem Bruche abgezogen nie 0 geben.

Bey dieser Gelegenheit könnte das nur gebrauchte Verfahren eine Schwürigkeit veranlassen. Weil nähmlich $(z + e)^m$ nur $m + 1$ Glieder, die Potenz n der Reihe ⊙ aber deren unzählich viel hat, so ist die Frage, wie es sich mit den Coefficienten dieser Potenz verhält, die zu Gliedern, welche nach dem $m + 1$ten folgen, gehören. Die Antwort ist: Sie müssen für sich $= 0$ seyn, weil sie keine in $(z + e)^m$ haben, denen sie gleich könnten gesetzt werden.

Wenn z. E. $m = 1$; $n = 2$; also $A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{8}$; so ist $\frac{n.(n-1)}{1.2.} AA + nB = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$.

II. Wenn man $\frac{1}{x+f} = (x + f)^{-1}$ (Nr. 12.) $= x^{-1} - fx^{-2} + f^2 x^{-3} \ldots$ (Alg. 6) auf die Potenz r erhebt; so findet man

(x

$$(x \dotplus f)^{-r} = x^{-r} - r.\ fx^{-r-1} - \frac{r.(r+1)}{1.\ 2} f^2\, x^{-r-2}$$

u. s. w. eben so als wenn man in 141; x; f; r; statt a; b; m gesetzt hätte. Daher man die dortige Formel auch auf verneinte Exponenten erweitert. Es ist aber wieder dieses Verfahren nicht zulänglich die Erweiterung auf alle Coefficienten zu rechtfertigen. Nimmt man sie allgemein an, so wird die Reihe ebenfalls unendlich wie 1;

III. Doch erhellt soviel, daß man den ersten und zweyten Coefficienten einer Potenz, deren Exponent gebrochen oder verneint, oder gebrochen und verneint ist, sicher finden kann, wenn man diesen Exponenten statt m in 141 setzt.

IIII. Es gibt auch ein Verfahren eine endliche Reihe für eine Potenz eines ganzen verneinten Exponentens zu finden. Soll man $(1 + y)^{-r}$ finden, so mache man $\frac{y}{1+y} = z$; oder $y = \frac{z}{1-z}$ und $1 + y = \frac{1}{1-z}$ und $(1 + y)^{-r} = (1 - z)^{+r} =$

$1 - rz^{r-1}$. . . (148) welche Reihe abbricht, wenn $-r$ eine ganze verneinte Zahl ist.

V. Joh. Colson (The method of Fluxions by Sir Isaac Newton, translated by I, Colson in der beygefügten Erläuterung Sect. V. p. 310.) sagt, er habe

habe diese Reihe erfunden, und sie dem de Moivre mitgetheilt. Walz (Nou. Act, Erud. Lipſ. Mart. 1745; p. 144.) und Euler (Inſt. Calc. diff. P. II. §. 73.) haben ihre Erfindung auch gewieſen; Colſon zwar durch die Fluxionenrechnung, die andern durch andere Kunſtgriffe. Daher hat es mir der Mühe werth geſchienen zu zeigen, wie dieſe Reihe nur eine ſehr leichte Folge aus dem bekannten binomiſchen Lehrſatze iſt. Das Unendliche in $(1 + y)^{-r}$ wird durch ſie nicht aufgehoben, ſondern nur verſteckt, denn die Gröſſe z läßt ſich durch y nicht anders als vermittelſt einer unendlichen Reihe ausdrucken. Die Colſoniſche Reihe kann zu Aufhebung des Unendlichen ohngefähr ſoviel leiſten, als die diophanteiſche Analyſis (183) zu Aufhebung des Irrationalen. Wenn man $\sqrt{(1 + y)} = 1 + yz$ ſetzt, ſo findet ſich $y = \frac{1 - 2z}{zz}$ und $1 + yz$ oder $\sqrt{(1+y)} = \frac{1-y}{z}$ das heißt aber nicht die Irrationalgröſſe durch einen endlichen Ausdruck finden: denn dieſer endliche Ausdruck giebt ſie durch z; wollte man z durch y wegſchaffen, ſo würde die unendliche Reihe wiederkommen. Eben ſo würde es in IIII. gehen.

628. Zuſ. Dieſes Verfahren (625) ſetzt zum voraus, daß man die Exponenten der geſuchten Reihe, oder die Geſtalt dieſer Reihe (formam ſeriei

seriei) schon weiß, und nur die Coefficienten sucht.

629. Anm. Wäre die Gestalt der Reihe nicht richtig angenommen worden, so entdeckt die Rechnung dieses sogleich, weil man für die Coefficienten Werthe, die nicht statt finden können, bekömmt. So erhellt, daß die angenommene Reihe ein Glied wie Ax haben muß, damit beym Quadriren in ihr die erste Potenz von x kömmt, welche gegenüber in $1 + x$ auch zu finden ist. Gesetzt nun, man nehme die Reihe

$$1 + Ax + Bx^{3:2} + Cx^{5:2} \ldots \text{ an; so wäre ihr}$$

Quadrat

$$1 + 2Ax + 2Bx^{3:2} + AAx^2 + \left.\begin{matrix} 2AB \\ + 2AC \end{matrix}\right\} x^{5:2} \ldots$$

Schafft man nun die gegenüberstehende Glieder $1 + x$ auch auf diese Seite, so bekömmt man nach vorigem Verfahren $A - \frac{1}{2} = 0$; $A = \frac{1}{2}$; $2B = 0$; $A = 0$ welches dem vorigen Werthe $\frac{1}{2}$ widerspricht, daß also keine Coefficienten dieser Reihe können gefunden werden.

630. Anm. Man wird finden, daß eben die Coefficienten wie 625; herauskommen, wenn man in (141) $\frac{1}{2}$ statt m setzt; Sie sind nähmlich alsdenn: $\frac{1}{2}$; $\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{1.2} = -\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3} = +\frac{1}{16}$; $\frac{1}{16}\cdot\frac{\frac{1}{2}-3}{4} = -\frac{5}{128}$ u. s. w.

631. Aufg. Aus einer Gleichung zwischen zwo veränderlichen Grössen; die eine y, durch

eine Reihe, deren Glieder nach Potenzen der andern x, geordnet sind, zu finden, wofern die Gestalt dieser Reihe (628) gegeben ist.

Aufl. Man setzt die angenommene Reihe statt y in die Gleichung, und bestimmt die Coefficienten nach (624) wie in (625.)

Ex. Für $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = o$ nehme man an $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ so kömmt

$$y^3 = A^3 + 3AABx + 3ABBxx + B^3x^3$$
$$+ 3AAC + 6ACB$$
$$+ 3AAD$$

$$aay = aaA + aaB + aaC + aaD \text{ u. ſ. w.}$$
$$axy = + aA + aB + aC$$
$$-2a^3 = -2a^3$$
$$-x^3 = -1$$

(34)

Hier ist I) $A^3 + aaA - 2a^3 = \odot$; Man versuche, ob sich a statt A setzen läßt; und weil dieses angeht, so ist ein Werth $a = A$; Man dividire die Gleichung I mit $A - a$; so erhält man eine quadratische, deren beyde Wurzeln $a.(-1 \pm \sqrt{-7}):2$ sind; diese beyden unmöglichen Werthe von A braucht man also nicht, sondern den einzigen möglichen. Dieser in den Coefficienten zu x gesetzt, gibt II) $4aaB + aa = o$ oder $B = -\frac{1}{4}$ beyde gefundene Werthe von A und B in den Coefficienten zu xx gesetzt, geben

III) $\frac{3a}{16} + 4aaC - \frac{1}{4}a = o$ und $C = -\frac{1}{64}a$; und endlich, ist das gefundene im nächsten Coefficienten gebraucht,

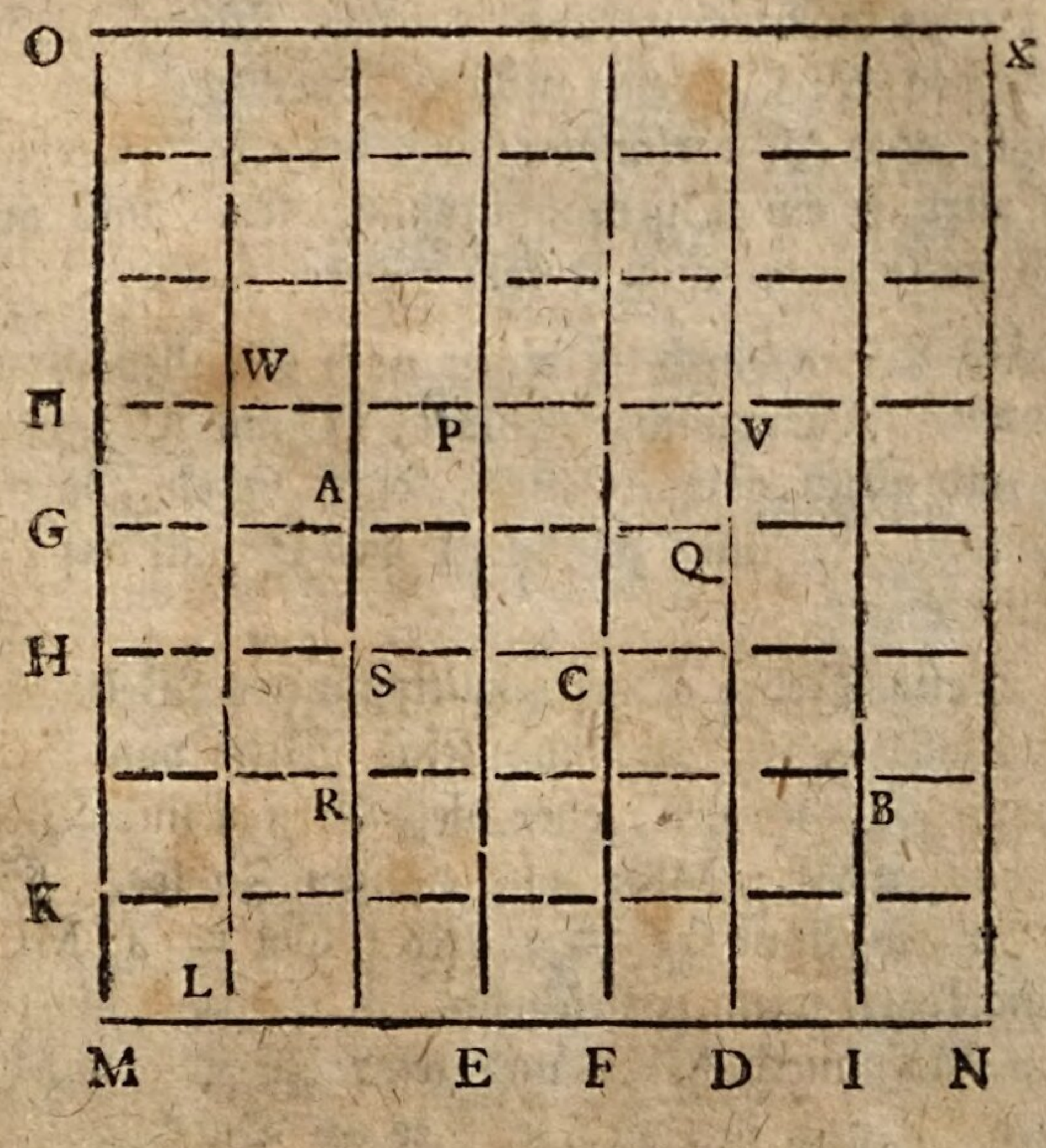
IIII) $4aaD - \frac{131}{128} = o$ oder $D = \frac{131}{512aa}$;

so findet man soviel Coefficienten der angenommenen Reihe als man will.

632. Anm. Die ganze Schwürigkeit kömmt also nur darauf an; die Gestalt der Reihe zu finden. Dieses zu bewerkstelligen, hat Newton durch eine Erfindung angewiesen, die parallelogrammum Newtonianum genannt wird: Man findet sie in verschiedenen Schriften erklärt; unter andern in Newtons Method of Fluxions and infinite series, welche Joh. Colson aus Newtons lateinischen Manuscripte englisch übersetzt zu London 1736; 40 herausgegeben hat: Colson hat solche in seinem beygefügten Commentario sehr weitläuftig erläutert, aber keinen tüchtigen Beweis davon gegeben. Weil mir auch sonst nirgends ein Beweis vorgekommen ist, habe ich dergleichen in einer 1743 zu Leipzig gehalte-

nen

ten Disputation gegeben, die den Titel führet: Aequationum ſpecioſarum reſolutio Newtoniana per ſeries. Er kömmt auf folgende Sätze an:



633. Lehnſ. Die gerade Linie MN ſey in ſoviel gleiche Theile als man will getheilet; einer ſey ML; und MO welche auf ſie ſenkrecht ſteht, ſey in ſoviel gleiche Theile als man will getheilet, deren einer MK iſt; es mögen ML; MK; unter ſich gleich ſeyn oder nicht. Durch alle Theilungspunete ziehe man Parallelen

mit MN; MO; die einander, z. E. in A; P; C; begegnen. Ich behaupte folgendes:

I) Durch zweene Durchschnittspuncte wie A; C; ziehe man eine gerade Linie AC. Wenn auf ihr zwischen A; C; kein anderer Durchschnittspunct fällt; aber AC verlängert wird, bis CB = CA ist, so wird B ein Durchschnittspunct seyn, und auf CB zwischen C und B kein anderer fallen.

II) Wenn durch P; einen nach Gefallen angenommenen Durchschnittspunct, PQ mit AC parallel und gleich gezogen wird, so ist Q ein Durchschnittspunct, und zwischen P und Q fällt auf PQ kein anderer.

Bew. Jedes Durchschnittspunctes Weite von MO wird durch ML. und seine Weite von MN durch MK gemessen, oder diese Weiten sind Vielfache von ML; MK; nach ganzen Zahlen. So ist in der Figur CF = 3. MK; CH = 4. ML; Umgekehrt, wenn zugleich die Weite eines Punctes von MN durch MK; und seine Weite von MO durch ML gemessen wird, so ist es ein Durchschnittspunct.

I. Nun sey für solche Weiten der Durchschnittspuncte A; C; MG = r. MK; AG = n. ML; CF = (r - d). MK; CH = (n + ∂). ML; wo r; n; d; ∂; ganze Zahlen sind; Mit den Seiten des Rechtecks; MO; MN; ziehe man AS; CH; parallel, die einander in S begegnen; durch B ziehe man auch BI; BR; Weil BA = 2BC; so ist BR = 2CS

$= 2CS = 2\delta$ ML also MI $=$ AG $+$ BR $=$ (n $+ 2\delta$). ML. Eben so AR $= 2$AS $= 2d$. MK und BI $=$ MG $-$ AR $=$ (r $- 2d$). MK; also werden MI; BI; des Punctes B Entfernungen von den Seiten, durch ML; MK; gemessen, und B ist ein Durchschnittspunct. Gäbe es dergleichen auch zwischen B und C; so trage man desselben Weite von C auf der Linie CB; auf die andere Seite des Punctes C nach A zu; und erwiesener massen gäbe dieses auch einen Durchschnittspunct zwischen C und A, wieder die Voraussetzung.

II. Man ziehe durch P und Q Parallelen PΠ; QD; mit den Seiten, die einander in V begegnen. Weil AC $=$ PQ; ACS $=$ QPV; CAS $=$ PQV; ist $\triangle$SAC $= \triangle$PVQ; also PV $=$ SC; VQ $=$ AS; Nun wird PE von MK; EM von ML gemessen, weil P nach der Voraussetzung ein Durchschnittspunct ist. Imgleichen wird VQ $=$ AS von MK; und PV oder CS von ML gemessen, (aus I.) Folglich wird auch QD oder PE $-$ VQ; von MK; und MD oder ME $+$ VP von ML gemessen, (denn wenn zwo Grössen, Vielfache einer dritten sind, so ist jener beyden Summe oder Untesschied auch ein Vielfaches der dritten.) So ist also Q auch ein Durchschnittspunct. Zwischen P und Q fällt keiner. Denn viele einer dazwischen, so schneide man von C nach A zu auf CA ein Stück ab, das so groß ist als des Durchschnittspunctes, der zwischen P und Q fallen soll, Abstand von P; so fällt erwiesener

massen auch ein Durchschnittspunct auf CA zwischen C und A wieder die Voraussetzung.

634. Anm. Wäre CF ⊱ MG; oder MF ⊱ AG so wären d oder δ verneint.

635. Anm. Newton betrachtet die Durchschnittspuncte als Winkelpuncte der kleinen Rechtecke, in welche das grosse getheilet wird; Colson als derselben Mittelpuncte. Beydes ist gleichgültig. Es erhellt auch, daß diese Schlüsse alle noch gelten würden, wenn man statt des Rechteckes ein schiefes Parallelogramm machte; welche Allgemeinheit aber hier von keinem Nutzen wäre.

$-m+5b$	$5b$	$m+5b$	$2m+5b$
$-m+4b$	$4b$	$m+4b$	$2m+4b$
$-m+3b$	$3b$	$m+3b$	$2m+3b$
$-m+2b$	$2b$	$m+2b$	$2m+2b$
$-m+b$	b	$m+b$	$2m+b$
$-m$	o	m	$2m$
$-m-b$	$-b$	$m-b$	$2m-b$
$-m-2b$	$-2b$	$m-2b$	$2m-2b$
$-m-3b$	$-3b$	$m-3b$	$2m-3b$

636. Zus. Jeder Durchschnittspunct bekomme einen der Werthe, die beygefügte Figur zeigt, oder man schreibe diese Werthe in die Fache; die Rechtecke,

ecke, deren Winkelpuncte oder Mittelpuncte die Durchschnittspuncte sind. Für die Hauptreihen nehme man hier an, die lothrechte, in welcher sich die Vielfache von b; die wagrechte, in welcher sich die Vielfache von m befinden. Die übrigen Werthe schreibe man nach folgendem Gesetze ein; daß jeder die Summe der Werthe beyder Hauptreihen ist, die mit ihm zugleich in einer lothrechten und in einer wagrechten Reihe stehen; oder denen er beyden zugleich gegenüber steht, so wie im Einmahleins die Factoren dem Producten gegenüber stehen; (Ar. I. 36.)

So stehet 2 m + 3 b in einer Horizontalreihe mit 3 b und in einer Verticalreihe mit 2 m aus welchen beyden es zusammengesetzt wird.

Um nun die Reihen zu zählen, gebe man der wagrechten Hauptreihe die Zahl ○; so wird die erste Horizontalreihe seyn, in der b; m + b; 2 m + b u. s. w. ist. Giebt man eben so, unter den lothrechten Reihe, der Hauptreihe die Zahl ○; so bekömmt die, welche ihr zur rechten ist, und m + b; m + 2 b; m + 3 b; u. s. w. enthält, 1; die dieser zur rechten ist 2; u. s. w. So heißt r b das r te Glied der lothrechten Hauptreihe; und n m das n te Glied der wagrechten. Beyde zusammen machen die Grösse in dem Fache aus, das mit r b in einer wagrechten, und mit n m in einer lothrechten Reihe stehet.

So steht 5 b + 2 m zugleich von beyden Hauptreihen dem fünften der lothrechten und dem zweyten der wagrechten gegen über;

Diese Grösse nun r b + nm; wird das n te Glied, der r ten wagrechten Reihe seyn, und für die Glieder, die sich unter der wagrechten, oder linker Hand der lothrechten Hauptreihe befinden, sind r; n; verneint.

So ist 3 b + m; das erste Glied der dritten wagrechten Reihe; für — m — 3 b ist n = — 1; r = — 3 oder es ist das — 1 ste Glied der — 3 ten wagrechten Reihe.

Wenn also die Seiten des Rechteckes MO; MN; den Hauptreihen zugehöten, so befindet sich A (633. I.) in der n ten lothrechten, und in der r ten wagrechten, oder es ist A das n te Glied der r ten wagrechten Reihe, also = r b + n m; Eben so C = (r - d). b + (n + δ). m. Wenn nähmlich o stünde, wo M steht, so müßte m kommen, wo L steht; und einem Durchschnittspunct (633) in MN; dessen Abstand von MO; n. ML ist, gehört n. m zu, und r. b einem in MO dessen Abstand von M; r. MK ist.

So ist B = (r — 2 d). b + (n + 2 δ) m; also C — A = δm — bd = B — C. Wenn also durch A und C eine gerade Linie gezogen, ein Linial gelegt wird, so sind alle Werthe der Durchschnittspuncte, durch welche sie geht, in einer arithmetischen Reihe.

637.

637. Zus. P in (633. II.) sey das λte Glied der 1ten wagrechten Reihe; also sein Werth l b + λ m; so ist Q = (l — d) . b + (λ + δ) m.

638. Zus. Wenn δ m — b d = o; oder m = b d: δ; so werden alle Werthe, durch welche das Linial zugleich geht, gleich; un diesen Werth von m gebraucht, findet man A = (r + nd: δ) . b; P = (l + λ d: δ) . b = Q. Wird also das Linial aus der Lage AC in die Lage PQ gebracht, die der vorigen parallel ist, so geht es durch lauter gleiche Werthe.

639. Exempel. Das Linial gehe in der ersten Lage durch — m + b; — b; m — 3 b; jedes Paar von diesen Werthen gibt eine Gleichung, daraus 2 b = m folgt; Nach diesem wird das Linial durch — m + 2b; o; m — 2 b; alsdenn durch — m + 3 b; b; m — b; 2m — 3 b; endlich durch — m + 4 b; 2 b; m; 2 m — 2 b; gehen, wo alle Werthe, durch welche es auf einmahl geht, gleich gefunden werden, wenn man 2 b statt m setzt. Alsdenn wird nähmlich — 2 m + 2 b = — 2 b + 2 b = o und m — 2b = 2b — 2b = o; aus — m + 3b wird — 2b + 3b = + b aus — m + 4b wird 2b u. s. w.

640. Zus. Innerhalb des Winkels ASC 36 F. rechter Hand der Linie AC befinde sich P; und mit SC; SA; CA; ziehe man durch P Parallelen. PW; PD; YX; so ist SY ∽ SA und △ PWY ∽ △ ASC

Δ ASC also WY: WP = SA: SC und WY = WP. SA: SC also SY = PD + WP. SA: SC. Nun ist PE des Punctes P Entfernung von MN, (in der Fig. 633.) = l. MK; davon CF abgezogen, läßt PD = (l - r + d). MK; Eben so gibt das dortige PΠ oder λ. ML; um AG vermindert, PW = (λ - n). ML. Also ist SY = ((λ - n). d: δ + l + d — r). MK. Weil nun AS = d. MK; und SY ≷ AS so ist (λ - n). d: δ + l + d - r ≷ d; und λ d: δ + l ≷ r + nd: δ Hieraus, und aus dem was 638 angenommen worden; folgt P ≷ A;

Nun falle p auserhalb des Winkels ASC; doch rechter Hand der Linie AC; Man ziehe durch p eine Parallele mit AC die den Linien SC; SA; in X; Y; begegnet, und nehme auf ihr p2p = 2p3p u. s. w. alle = AC; so sind 1p; 3p Durchschnittspuncte, (633. II.) alle von gleichen Werthen mit p (637) Einer dieser Puncte fällt nothwendig innerhalb des Winkels ASC; denn man kömmt solchergestalt auf Linien, p2p; p3p; p4p; deren eine gewiß ein Vielfaches von CA wird, das so groß als pX; oder grösser ist. Im letzten Falle ist die Sache klar; im ersten schneide man von X aus auf XY nach Y zu noch ein Stück = CA ab, so giebt es einen Punct, der innerhalb des Winkels SCA fällt, weil XY ≷ AC.

Es gibt drey Lagen, in denen P, rechter Hand der Linie AC liegen kannn. Innerhalb des Winkels ASC; unter SC; linker Hand SY: die beyden letz-

ten

ten lassen sich gewiesener Maassen auf die erste bringen. Also ist überhaupt folgendes wahr: Wenn sich das Linial parallel mit AC bewegt; so kömmt es nach und nach am Werthe, da die vorhergehenden von den folgenden abgezogen, alle bejahte Unterschiede geben, und also kleiner sind, wenn sie bejaht sind, und als kleiner können angesehen werden, wenn sie verneint sind. (Ar. I. 95) Nähmlich λd: δ + l und r + nd: δ könnten beyde zugleich, oder das letzte allein, verneint seyn, wenn r, n, und die übrigen Grössen zum Theil verneint würden; z. E. wenn A unter MN, oder linker Hand MO fiele. Alsdenn zeigt der Schluß λd: δ + l ≷ r ± nd: δ nur an, daß die Grösse zur rechten Hand, von der zur linken Hand abgezogen, was bejahtes läßt, oder daß λd: δ + l — (r + nd: δ) ≷ o

Im Exempel 639; sind die Werthe, an welche das Linial nach und nach kömmt, — b; o; + b; 2b; und die verneinten abnehmenden, werden als wachsende angesehen.

641. Zus. Wie auch zweene Durchschnittspuncte in der Figur 633 liegen, so muß doch einer niedriger als der andere seyn, wenn nicht beyde in einer wagrechten Linie liegen; der untere soll allemahl C heissen: Nun kann C rechter Hand oder linker Hand der lothrechten Reihe liegen, in welcher sich A befindet. Im ersten Falle ist CH = (n + δ) ML; und den habe ich bisherr betrachtet. Im zweyten ist CH = (n - δ). ML; und C = (r - d). b + (n - δ).

(n - δ). m; dieser Werth dem Werthe von A welcher keine Veränderung litt, gleichgesetzt, giebt m = — bd: δ; Also ist m allemahl verneint, wenn C linker Hand in Absicht auf A liegt.

Für C = — m — 3b und A = 2m — 2b ist m = — $\frac{1}{3}$ b und C = A = — $\frac{8}{3}$ b.

Alle Fälle, und die ihnen zugehörigen Werthe von m enthält folgende Tafel. Jeder Werth von m ist bd: δ, und ich deute nur durch sein Zeichen an, ob er bejaht oder verneint ist.

Werthe von m	A hor. r; n tes Glied	Fall
+	C r - d; n + δ; . .	1
—	n — δ;	2
	A hor. - r; nt Gl.	
+	C — r - d; n + δ;	3
—	n — δ;	4
	A h. + r; — nt Gl.	
+	C r - d; — n + δ;	5
—	n — δ;	6
	A. h. — r; — n t Gl.	
+	C — r — d; n + δ;	7
—	— n — δ;	8.

Z. E. im 7 Falle ist A in der — r ten Horizontalreihe das — n te; und C in der — r - d ten Horizontalreihe, das — n + δ te Glied, und wenn da r = 2; n = 1; d = 1; δ = 3; so ist A =

— 2b

$-2b-m$; $C=-3b+2m$; $m=\frac{1}{3}b$;
Alle diese Mannichfaltigkeiten aber sind in den Formeln für A und C (636) und für m (638) enthalten, wenn die Zeichen von r; n; δ; nach Erfoderung der Umstände geändert werden, denn d und b, behalten die ihrigen allemahl.

642. Zus. Man stelle sich 36 Fig. (640) umgewandt vor, daß SY zur rechten Hand fällt, und SX sich von der rechten gegen die linke erstreckt, daß also CA; XY; P; D; linker Hand der Linie SY fallen; so hat man die Figur für (641). Hier wird also nur die ganze Figur umgewandt, alle Linien behalten einerley Lage gegen einander, also bleiben alle Schlüsse in 640, und wenn man sich der Buchstaben zur Rechnung bedienen will, darf man nur acht geben, wie dieser Buchstaben Zeichen nach 641 müssen geändert werden. Nun ändern sich PD; SA; nicht, aber PW wird $(n-\lambda)$. ML weil PW jetzo nicht mehr des Punctes P Entfernung von MO, weniger AG; sondern AG weniger der Entfernung des Punctes P ist, indem der Punctes P Entfernung nicht so viel als AG beträgt. Auch ist CS nicht CH-GA sondern GA-CH; also $=\delta$. ML; weil $CH=(n-\delta)$. ML. Daher ist $SY=(l-r+d+(n-\lambda)d:\delta)$. MK; und wenn man $SY\leqq SA$ setzt, so folgt $l-\lambda d:\delta \leqq r-nd:\delta$; und weil $m=-bd:\delta$ ist $A=(r-nd:\delta)b$ und $P=(l-\lambda d:\delta)b$; also wieder $P\leqq A$. Wird also das Linial aus dieser Lage parallel bewegt, so kömmt es bey fortgesetz-

gesetzter Bewegung immer an grössere bejahte Werthe, oder an kleinere verneinte.

Es sey $A = 2m + b$; $C = m - b$; also $m = -2b$; und $A = C = -3b$; In den folgenden Lagen kömmt das Linial an $-2b$; m; $2m + 2b$; darnach an $-b$; $m + b$; $2m + 3b$; darnach an $-m - 2b$; 0; $m + 2b$; darnach an $-m - b$; b; $m + 3b$; darnach an $-m$; $2b$; $m + 4b$; endlich an $-m + b$; $3b$; $m + 5b$; und die Werthe, an die es zugleich kommt, sind $-3b$; $-2b$; $-b$; 0; $+b$; $+2b$; $+3b$:

643. Zus. Wenn das Linial in (640) wo C rechter Hand von A aus liegt, von der rechten nach der linken zu bewegt wird, so kömmt es an kleinere bejahte, oder grössere verneinte Werthe; eben das begegnet ihm, wenn es in (642) wo A rechter Hand von C aus liegt, von der linken nach der rechten zu bewegt wird. In beyden Fällen also kömmt das Linial an grössere Werthe, wenn es nach oben zu, und an kleinere, wenn es nach unten zu bewegt wird.

644. Zus. Wenn zwey Glieder einer wagrechten Reihe, z. E. $m + 5b = 2m + 5b$ gleich gesetzt werden, woraus $m = 2m$ folgt, so darf man nicht mit m dividiren, weil daraus die Ungereimtheit $1 = 2$ folgen würde; Sondern $m = 2m$ zeigt an, daß $m = 0$; Dieses gilt also, so oft als Glieder in einer wagrechten Reihe einander gleich gesetzt werden.

645.

645. Lehns. Die Reihe $y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Rx^{m+rd}$ wo m jede bejahte oder verneinte, ganze oder gebrochne Grösse, und d einen beständigen Unterschied der Reihe der Exponenten bedeutet, heisse der Kürze wegen ⊙. Die grossen Buchstaben sind Coefficienten dieser Reihe. A heißt der erste, die übrigen alle heissen folgende. Ich sage, wenn diese Reihe auf eine Potenz von einem ganzen bejahten Exponenten k; erhoben wird, so folgen die Exponenten von x in dieser Potenz, so nach einander, daß der erste mk ist, und die folgenden mit ihnen in einer arithmetischen Reihe sind, deren Unterschied d ist.

Bew. I) Weil $y = x^m \cdot (A + Bx^d + Cx^{2d} \ldots + Rx^{rd} \ldots)$ so suche man die Folge der Exponenten von x (denn von keinen andern ist hier die Rede) in dem zweyten Factor; den ich ♂ nennen will; Man heisse seine ersten beyden Glieder $A + Bx^d = \alpha$ die ersten drey $\alpha + Cx^{2d} = \beta$; u. s. w. die ersten r zusammen, unter denen das letzte $(r-1)$ d zum Exponenten hat, ϱ;

II) Nun sind die Exponenten in α; 0; d; 2d; 3d; .... kd (141)

III) Wenn die Exponenten für jede Potenz von den ersten r Gliedern in dieser Reihe o; d; 2d; ... fortgehen, oder wenn ϱ auf jede Potenz erhoben, eine Reihe von Exponenten hat, die lauter vielfache von d sind, so hat $\varrho + Rx^{rd}$ auf die Potenz k erhoben, eben dergleichen Reihe von Exponenten, oder die Exponenten in der Potenz k der ersten, oder die Exponenten in der Potenz k der ersten r + 1 Glieder sind auch lauter Vielfache von d; denn vermöge (141) ist von $\left(\varrho + Rx^{rd}\right)^{k}$ das e + 1te Glied; die Binomialcoefficienten, (141) weil sie hier nicht nöthig sind, nicht betrachtet, $k-e \quad e \quad erd$ $\varrho \quad . Rx$; Da nun vorausgesetzt wird, ϱ $k-e$ sey eine Reihe, wo die Exponenten lauter Vielfache von d sind; und da jedes Glied von dieser Reihe, mit einer Potenz von x multiplicirt wird, deren Exponent erd auch ein Vielfaches von d ist, so ist der Exponent jedes solchen Products, die Summe zweyer Vielfachen von d; also auch ein Vielfaches von d.

V) Die Vorausetzung (IIII) ist für r = 2 wahr, also ihre Folge für die ersten drey Glieder. Und diese Folge als die Vorausetzung für r = 3 angenommen, giebt eben eine solche Folge für die ersten vier Glieder, u. s. w. daß also die Potenz k: der Reihe ♂ lauter Exponenten hat, die Vielfache von d sind.

VI)

VI) Für die Potenz k von y; muß jedes Glied der Potenz k von ♂, durch die Potenz mk von x multiplicirt werden, und der Exponent dieses Productes ist also mk + einen Vielfachen von d; d. i. ein Glied einer arithmetischen Reihe, die sich von mk anfängt, und d zum Unterschiede hat.

646. Zus. I. Der Coefficient R kömmt in der Potenz k von ♂ zuerst im zweyten Gliede von $\left[\varrho + R x^{rd}\right]^k$ vor; Für die Stelle also, wo er zuerst vorkömmt, ist e = 1 und er kömmt also zuerst in dem Producte $k.\varrho^{k-1}.Rx^{rd}$ vor, (ich setze hier nicht wie vorhin den Binomialcoefficienten k bey seite, weil er sich so kurz ausdrücken läßt.) Weil nun die Potenz k - 1 von ϱ; selbst eine Reihe, und ihr erstes Glied A^{k-1} ist, so ist das nur genannte Product eine Summe verschiedener Producte, und das erste unter diesen Producten ist $k.A^{k-1}.R.x^{rd}$ wo also R in der Potenz k von 2 zuerst vorkömmt. Folglich kömmt R in der Potenz k von y; zuerst in folgenden Producte: $k.A^{k-1}.Rx^{mk+rd}$ vor Jeder folgende Coefficient der Reihe (645) kömmt also zuerst bey der Potenz mk + rd von x vor, und da, wo er zum erstenmahle vorkömmt, befindet sich von ihm selbst nur seine erste Potenz. Von dem ersten gilt dieses nicht, weil vorausgesetzt wird, daß

ϱ etwas ist, ehe man an R kömmt, oder daß Rx^{rd} das zweyte Glied einer zweytheilichten Wurzel und ϱ ihr erstes ist.

II. Hievon ist nur der Fall auszunehmen wenn $k = 1$ also $k - 1 = c$ wo R zuerst im Gliede Rx^{rd} vorkömmt.

Ex. zu I. Im Exempel (631) wo $d = 1$; sey $R = C$ und $k = 3$; so kömmt C in y^3 zuerst bey x^2 vor, wo es mit AA multiplicirt ist.

Ex. zu II. Aber eben daselbst kömmt C in aay zuerst bey eben der vorigen Potenz von x vor, ohne in A multiplicirt zu seyn.

647. Zus. Wenn in einer Gleichung ein Product wie $py^{\varkappa} x^{\tau}$ vorkömmt, und in demselben die Reihe ⊙ statt y gesetzt wird, so verwandelt sich dieses Product in eine Reihe, wo R zum erstenmahle in der ersten Abmessung in die Potenz $m\varkappa + \tau + rd$ von x multiplicirt vorkömmt.

648. Lehrl. (24) $py^{\varkappa} x^{\tau} + qy^{\varepsilon} x^{\eta} + ry^{\lambda} x^{\mu} + sy^{\varrho} x^{\pi} = o$ kann jede Gleichung zwischen zwo veränderlichen Grössen vorstellen;

Jede solche Gleichung enthält Potenzen von π allein, oder von x allein, oder Producte aus Potenzen beyder, oder ein unveränderliches Glied. Die erste Gattung von Gliedern kann man ausdrücken,

drücken, wenn man $\varkappa$ oder ε oder λ oder $\varrho = 0$ setzt; die andere, wenn man ς oder η oder μ oder $\pi = 0$ setzt; die dritte kann jedes Glied der hingeschriebenen Gleichung vorstellen; Für die vierte kann man, in welchem Gliede dieser Gleichung man will, z. E. im letzten; zugleich $\varsigma = 0$ und $\pi = 0$ setzen. Auch kann ein Glied, z. E. das dritte, nachdem man für λ und μ verschiedene Werthe annimmt, verschiedene Glieder bedeuten.

649. Zus. Wenn man in $\mathcal{U}$ die Reihe $\odot$ (645) statt y setzt; so gibt jedes Product derer, die zusammen $\mathcal{U}$ ausmachen, eine Reihe; ich will die Reihe I die nennen, die aus dem ersten Producte, II die aus dem zweyten entsteht, u. s. w. Aus allen diesen Reihen entsteht eine zusammengesetzte Reihe wie (631; Man könnte sie die Reihe der Gleichung wie jede der andern, eine Reihe eines Theiles der Gleichung nennen. Hat x in der Reihe eines Thiles der Gleichung eben den Exponenten, den es in der Reihe eines andern Theiles hat, so machen die Glieder dieser beyden oder mehrern Reihen, wenn solches bey mehrern Reihen der Theile stat findet zusammen ein einziges Glied der Reihe der Gleichung aus; dessen Coefficient also aus den Coefficienten der Reihen der Theile besteht.

Man s. das Exempel 631. Für dasselbe wäre z. E. $p = 1$; $\varkappa = 3$; $\tau = 0$; $q = aa$; $\varepsilon = 1$; $\eta = 0$; und auch, wenn das zweyte Glied der allgemeinen Gleichung (648) noch ein anders, der 631 bedeuten soll;

$q = -2a$; $\varepsilon = 0$; $\eta = 0$; Ferner $r = a$; $\lambda = 1 = \mu$; $\int = -1$; $\varrho = 0$; $\pi = 3$;

650. Zus. Die ersten Exponenten dieser Reihen (649) sind $m\varkappa + \tau$; $m\varepsilon + \eta$; $m\lambda + \mu$; $m\varrho + \pi$; welche man nähmlich erhält, wenn man der Reihe O erstes Glied in die Gleichung setzt. Sie gehören den ersten Gliedern der Reihen der Theile zu. Unter diesen ersten Exponenten setze man ein paar gleich, z. E. $m\varkappa + \tau = m\varepsilon + \eta$; dieses bestimmt $m = (\eta - \tau) : (\varkappa - \varepsilon)$ Ist nun jeder der andern Exponenten $m\lambda + \mu$; $m\varrho + \pi$; u. s. w. so beschaffen, daß, wenn man $m\varkappa + \tau$ von jeden abzieht, allemahl entweder was Bejahtes, oder was Verneintes herauskömmt, d. i. sind die andern Exponenten alle entweder grösser, oder kleiner als $m\varkappa + \tau$; so kann man $m\varkappa + \tau$ den ersten Exponenten der Reihe der Gleichung nennen, und eine Reihe eines Theiles, welche $m\varkappa + \tau$ oder einen eben so grossen Exponenten zum ersten hat, ist eine von den Anfangsreihen der Reihe der Gleichung, dergleichen es also auser H noch mehr giebt, wenn es noch mehr Reihen der Theile gibt, deren erste Exponenten gleich sind. Mit diesen Reihen fängt sich nähmlich die Reihe der Gleichung an; die andern Reihen der Theile fangen sich später an.

651. Zus. Man sehe also die ersten Glieder der Anfangsreihen zusammen als das erste Glied der Reihe der Gleichung an; (649) und setze ihre Coefficien-

ficienten zusammen = o, so hat man eine Gleichung, die A bestimmt, denn in kein erstes Glied einer Rihe eines Theiles kömmt ein anderer Coefficient der Reihe ⊙ als A.

652. Zus. A kann durch eine höhere Gleichung bestimmt werden. Z. E. nach (648) wäre $pA^{\varkappa} + qA^{\varepsilon} = o$; Entsteht unter den Anfangsreihen eine aus einem Theile, der kein y enthält, so enthält der Coefficient ihres ersten Gliedes kein A; und giebt also in der Gleichung, in welcher man A als die unbekannte Grösse ansieht, ein völlig bekanntes Glied. Wenn es mehr als zwo Anfangsreihen geben soll, so müssen die griechischen Buchstaben, die in der Gleichung (648) gegeben sind, so beschaffen seyn, daß einerley Werth von m; die ersten Exponenten aller dieser Anfangsreihen gleich macht.

Man s. die Gleichung, welche A. 631 bestimmt, sie hat drey Glieder, weil es drey Anfangsreihen giebt, die aus y^3; aay: und $-2a^3$ entstehen, obgleich die letzte nur ein einigs Glied hat.

653. Erkl. Drey oder mehr Grössen a; b; c; sind in einer arithmetischen Reihe, deren Unterschied d was für eine ganze oder gebrochne, bejahte oder verneinte Zahl man will, ist, so daß f; g; ganze bejahte Zahlen bedeuten, und $a + fd = b$; $a + gd = c$; Ich nenne alsdenn d der erwähnten Grössen gemeinschaftlichen Unterschied.

654. Erkl. Wenn Φ; γ; auch ganze bejahte Zahlen sind, und $a + \Phi\delta = b$; $a + \gamma\delta = c$; aber $\Phi < f$; $\gamma < g$; so sage ich d sey ein grösserer gemeinschaftlicher Unterschied als δ; Ist also d so beschaffen, daß f und g für d kleiner sind als Φ und γ für jedes andere δ; so ist d der größte gemeinschaftliche Unterschied. Es ist nähmlich der Unterschied derjenigen arithmetischen Reihe, die unter allen arithmetischen Reihen, in denen sich a; b; c; befinden, die wenigsten Glieder hat.

655. Zus. a; b; c; können die Exponenten $m\varkappa + \tau$; $m\lambda + \mu = m\varkappa + \tau + fd$; $m\varrho + \pi = m\varkappa + \tau + gd$ beveuten; so fängt sich die Reihe der Gleichung g mit den Reihen I; II; (649; 650; an) die Reihe III aber fängt sich in der Reihe der Gleichung da an, wo der Exponent $m\varkappa + \tau + fd$ ist, d. i. in dem $f + 1$ Gliede der Reihe der Gleichung, nnd so die Reihe IIII in dem $g + 1$ Gliede u. s. w. ist also $f < g$ so fängt sich die Reihe III eher an als IIII; und folglich fängt sich nach den Anfangsreihen diejenige Reihe am ersten an, deren erster Exponent vom ersten Exponenten der Anfangsreihen am wenigsten unterschieden ist.

656. Zus. R (647) kömmt in der Reihe III zu erst bey dem Exponenten $m\lambda + \mu + rd$ vor, dieser Exponent ist $= m\varkappa + \tau + (f + r)d$ (655) und das Glied der Reihe III das ihn zum Exponenten hat, macht einen Theil des Gliedes der Reihe

der

der Gleichung aus, das eben den Exponenten hat, (649) also kömmt R in der Reihe der Gleichung, wegen der Reihe III später vor als wegen der Reihe I; da es schon bey den Exponenten $mx + \tau + rd$ vorkömmt. Also kömmt R wegen der Reihe I; in der Reihe der Gleichung, im $r + 1$ Gliede, und wegen der Reihe III im $r + f + 1$ Gliede vor. Die Reihen I; II; haben durchgängig einerley Exponenten, weil ihre ersten gleich sind (650) und die Exponenten eine arithmetische Progression ausmachen, (645) folglich kömmt in einer R bey eben dem Exponenten vor, bey dem es in der andern vorkömmt, oder R kömmt wegen beyder zuerst in einerley Gliede der Reihe der Gleichung vor: Dieses gilt auch, wenn die ersten Exponenten von mehr als zwo Reihen sind gleichgesetzt worden. (652)

Im Exempel 631. sey $R = C$; also $r = 2$; Auch ist da $m = o$; $d = 1$; was die Reihen I; III; sind, erhellt aus der Anwendung ven 649 auf dieses Exempel. Es ist aber $mx + \tau = o$; und $m\lambda + \mu = 1$; also $f = 1$ folglich $mx + \tau + r + 1 = 3$; $mx + \tau + f + r + 1 = 4$; und C kömmt, wie die dortige Rechnung zeigt, wegen der Reihen I und II zuerst im dritten, wegen der Reihe III zuerst im vierten Gliede der Reihe der Gleichung vor.

657. Lehrs. Wenn sich die Reihe III. (655) unter allen zuerst nach den Anfangsreihen anfängt, und $f > r$; so ist $R = o$

Bew. Solchergestalt kömmt R in der Reihe der Gleichung vor, ehe sich irgend eine andere Reihe eines Theiles anfängt. (656) Es soll aber so bestimmt werden, daß der Coefficient der Reihe der Gleichung, in welchem es sich zuerst befindet = o gesetzt wird. Dieser Coefficient besteht weiter aus nichts als aus den Coefficienten der Anfangsreihen, in denen R zuerst vorkömmt. (649) In jedem solchen Coefficienten einer Anfangsreihe aber ist R ein Factor (646) folglich ist der Coefficient der Reihe der Gleichung, in welchem R zuerst vorkömmt, ein Product, dessen einer Factor R ist, der andere Factor muß also durch die Binomialcoefficienten und die vorhergehenden Coefficienten der Reihe ⊙ gegeben seyn, wie aus dem Verfahren (631) erhellt. Nun ist R der r + 1 te Coefficient, (645) und kömmt auch im r + 1 Gliede der Reihe der Gleichung zuerst vor, (656) vor ihm gehen in der Reihe ⊙, r Coefficienten dieser Reihe her, und diese hat man dadurch bestimmt, daß man r Coefficienten der Reihe der Gleichung nach einander = o gesetzt hat. Also sind die Coefficienten der Reihe ⊙ welche vor R hergehen, alle schon bestimmt, und folglich kann man den erwähnten Factor, der durch sie gegeben ist, nicht = o setzen; Unter besondern Umständen könnten zwar die gefundenen Coefficienten so beschaffen seyn, daß sie zusammen diesen Factor = o machten; aber dieses läßt sich nicht allemahl zum voraussetzen, folglich ist dasjenige, was man überhaupt annehmen darf um das Product = o zu machen, daß

man

man R = o setzt, welches auch alsdenn frey stehen muß, wenn der andere Factor durch das Verhalten der schon bestimmten Grössen gegen einander von sich selbst = o würde; denn wenn nur soviel gesagt ist, daß ein Product = o seyn soll, so ist es allemahl verstattet jeden Factor, welchen man will, = o zu setzen, obgleich nicht umgekehrt folgt, daß jeder Factor = o seyn muß. Hier aber ist R noch unbestimmt, und man kann es also auf jede Art bestimmen, die den vorhergehenden Bestimmungen nicht wiederspricht, folglich darf es allemahl = o seyn.

658. Zus. Also ist unter diesen Umständen $y = Ax^{m} * + Sx^{m+fd}$ und alle Coefficienten zu Potenzen, zwischen m und m + fd; sind = o; weil r unbestimmt angenommen wird. Es kömmt nähmlich S zuerst wegen der Reihe I im f + 1 Gliede der Reihe der Gleichung vor; (656) und da fängt sich die Reihe III an (655) in deren ersten Gliede S noch nicht ist, (651) folglich ist das, was in diesem Gliede zusammen = o gesetzt wird, um S zu bestimmen, kein Product, von welchem S ein Factor wäre, daher die Schlüsse 637 wegfallen.

659. Exempel. Es sey $x^2 - aay + yyx + y^3 = o$; und man setze $y = Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 \ldots$ so ist nach 648; p = 1; $\varkappa = o$; $\tau = 3$; q = $-aa$; $\varepsilon = 1$; $\eta = o$; r = 1; $\lambda = 2$; $\mu = 1$;

f =

$f = 1; \varphi = 3;$ $\varkappa = 0;$ auch $m = 3;$ $d = 2$ also wird die Reihe

$$\begin{aligned} I &= \quad 1 \backslash x^3 \\ II &= -aaA \;\Big/ -aaBx^4 - aaC \Big\backslash x^7 \\ III &= \quad + AA \Big/ \\ IIII &= \quad + A^3 x^3 \end{aligned}$$

Sucht man hier y nach (631) so ist $A = -1 : aa$ und $-aaB = 0$; und $C = 1 : a^6$; Es ist nähmlich $m\varkappa + \tau = 3 = m\varepsilon + \eta$; und $m\lambda + \mu = 7 = 3 + 4$ also $fd = 4$; folglich $f = 2$; daher gehört der erste wirkliche Coefficient der Reihe ⊙ zur Potenz $m + 2d$ oder 7; und R 657 ist hier B; $r = 1$;

660. Aufg. Zu entscheiden, unter was für Umständen, A, B, C, . . . R nur eine oder mehr Werthe haben können.

Aufl. I. Daß A mehr als einen Werth haben kann, erhellt aus 652;

II. Jede der übrigen Grössen; R; kömmt in der Gleichungsreihe, eher in den Anfangsreihen vor als in den andern (656) und wo sie in den Anfangsreihen zuerst vorkömmt, hat sie nur die erste Abmessung (647)

III. Wo R zum ersten mahle auf die in II erwähnte Art vorkömmt, wird es mit einem gewissen Factor multiplicirt seyn. Dieser Factor ist entweder $= 0$; oder nicht.

IIII. Er sey nicht $= 0$: So macht das Product aus ihm in R; nebst andern beständigen Grössen

sen, einen gewissen Coefficienten der Gleichungsreihe: den man = o setzt. Es ist also p. R + q = o wo p und q durch Coefficienten der Gleichung selbst, und durch solche Grössen A, B, C, . . die vor R in der Reihe für y vorhergehen gegeben sind: Also ist $R = -\frac{q}{p}$ und hat nur einen Werth.

Im Exempel 631; sey R = D; so ist p = 3 AA + aa; q = B^3 + 6 ACB + a. C — 1;

V. Wenn aber p = o; so ist entweder zugleich q = o, oder nicht.

VI. Es sey q = o; so erhellt daß der Coefficient der Gleichungsreihe p. R + q = o wird, ohne R zu bestimmen. Ob, und wie also R bestimmt wird, das kömmt auf die folgenden Glieder der Gleichungsreihe an, in denen R höhere Abmessungen hat. Alsdenn kann also R mehr Werthe bekommen, ja wohl gar unmögliche.

Ex. Man setze y = A + Bx + Cx^2 - - in folgender Gleichung die linker Hand des Gleichheitszeichens in einer Columne steht:

	a^3 =	a^3			
— 2 a a y =	— 2aaA	— 2 aa Bx	+ 2aa Cx^2.	— . .	
+ a y y	— + aAA	+ 2aAB	+ aBB		
			— 2a AC		
+ x x y =			+ A		
+ x^3 =					+ x^3
0 = 0					

So wird AA — 2aA + aa = o; oder A = a; daher der Gleichungsreihe zweyter Coefficient (2aa — 2aa). B; ist also hier R = B; so ist p = o u. auch q = o aus diesem Coefficienten der Gleichungsreihe also bliebe B unbestimmt.

Der dritte aber wird (2aa — 2aa) . C + aBB + a = o also BB = — 1; Hier wird also B unmöglich.

VII. Dieß Exempel zeigt also daß folgende Coefficienten der Reihe für y unmöglich werden können, wenn gleich der erste möglich ist; und daß man also nicht allemahl schliessen darf, die Reihe für y, und der Werth den sie giebt sey möglich, weil ihr erster Coefficient möglich ist.

VIII. Wäre nicht q = o; so hätte man die Gestalt der Reihe für y unrichtig angenommen, (629) Sie muß nähmlich so angenommen werden, daß jeder Coefficient der Gleichungsreihe = o seyn kan: Ob dieses zu erhalten unmögliche Werthe von A, B, ... nöthig sind oder nicht, daran ist nichts gelegen; denn da nur das erfodert wird, daß jeder Coefficient der Gleichungsreihe, eine bestimmte Gleichung giebt, so ist es nichts ungereimtes wenn diese bestimmte Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

Wäre in der Gleichung des Exempels V; noch das Glied + bbx, und man hätte eben die vorige Reihe für y behalten, so bekäme der Gleichungsreihe zweytes Glied den Coefficienten o. B + bb. Es kann aber nicht bb = o seyn. Also führte diese Reihe für y auf einer Ungereimtheit.

VIIII. Hat R (ein Coefficient der Reihe für y, oder der Reihe ⊙) unterschiedene mögliche Werthe, so giebt jeder dieser Werthe, eine eigne Fortsetzung der Reihe ⊙; die sich daselbst in unterschiedene welche einen gemeinschaftlichen Anfang haben, gleichsam spaltet, bis dahin irreguläre Glieder hat, und von da an ordentlich wird, wo jeder Coefficient nur einen Werth hat. Diese Ausdrückungen sind Cramers Analyse des Courbes §. 104; 109.

Exempel. Für $x^3 - x^2 y + a y^2 - 2 a^2 y + a^3 = 0$ setze man $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6$ . . . so finden sich der Reihe, welche herauskömmt, wenn man ⊙ statt y in die Gleichung setzt, ihre Coefficienten zu den Potenzen 0; 1; 3; 4; 5; 6; u. s. w. folgender gestalt I) $aAA - 2aaA + a^3$; daraus sich $A = a$ findet. II) $- 2aB + 2aB$; III) $- 2a^2 C + aB^2 + 2a^2 C - a$; IIII) $- 2a^2 D + 2aBC + 2a^2 D - B + 1$; V) $- 2a^2 E + aC^2 + 2aBD + 2a^2 E - C$; VI) $- 2a^2 F + 2aCD + 2aBE + 2a^2 F - D$; VII) $- 2aaG + aDD + 2aCE + 2aBF - 2aaG - E$; folglich findet sich III $= 0$ gesetzt; $B = \pm 1$ und es giebt also zwo Reihen für y, nachdem man das obere oder das untere Zeichen gebraucht.

Bey dem Gebrauche des obern Zeichens wird aus IIII; $2aC = 0$ also $C = 0$; folglich auch E; F; G; u. s. w. $= 0$; welches $y = a + x$ giebt;

und

und dieses ist also hier der völlige Werth von y, welcher der Gleichung auch genug thut.

Bey dem Gebrauche des untern Zeichens, wird aus IIII; $-2aC+2=0$; $C=\frac{1}{a}$; ferner $D=0=E\ldots$ oder $y=a-x+xx:a$ welches wiederum der völlige Werth von x ist, der der Gleichung genug thut.

661. Zus. Von der Beschaffenheit der Grössen A, B . . R läßt sich nichts allgemeines behaupten, weil solche auf den Coefficienten der Gleichung beruht.

662. Lehrs. Die Exponenten der Reihe der Gleichung machen eine arithmetische Progreßion aus, deren erstes Glied $mx+\tau$; der Unterschied d ist.

Bew. Die Exponenten der Anfangsreihen (650) machen eine solche Progression, (545) fänden nun die Exponenten der andern Reihen in dieser Progreßion nicht statt, so könnte man keine Glieder dieser Reihen nach 649 zu Gliedern der Anfangsreihen setzen, um aus ihnen zusammen Glieder der Reihe der Gleichung zu machen. Weil man also annimmt, daß jeder Coefficient der Reihe der Gleichung $=0$ seyn soll, so müßten die Coefficienten dieser andern Reihen für sich $=0$ seyn, ohne daß etwas aus den Anfangsreihen zu ihnen käme. Aber in ihnen kommen ebenfalls A; B; C; u. s. w. eben

so

so nach einander vor, wie in den Anfangsreihen, nur später, (651; 656;) Also würde man aus ihnen A; B; C; u. s. w. von neuen bestimmen, die doch schon vorhin vermittelst der Anfangsreihen bestimmt waren, und zwar so, daß jedes auser A nur einen einzigen Werth haben kann. (660)

663. Zus. d muß ein gemeinschaftlicher Unterschied (653) der Grössen $m\varkappa + \tau$; $m\lambda + \mu$; $m\varrho + \pi$ u. s. w. oder der ersten Exponenten aller Reihen der Theile (650) seyn; woraus alsdenn folgt, daß es auch ein gemeinschaftlicher Unterschied aller Exponenten dieser Reihen der Theile ist. (645) Die Grössen, welche die griechischen Buchstaben andeuten, sind in der Gleichung selbst gegeben, und m wird nach 650. bestimmt.

664. Lehrs. Soll die Potenz von x die sich in jedem Gliede der Reihe ⊙ befindet, in Vergleichung mit der, die sich im nächstvorhergehenden befindet, so wenig als möglich betragen, und also die Reihe sich so schnell als möglich nähern, (12) so muß man d so groß als möglich, und also dafür den größten gemeinschaftlichen Unterschied (654) der Grössen $m\varkappa + \tau$; $m\lambda + \mu$ u. s. w. nehmen.

Bew. Wenn S den Coefficienten, der in 645 nach R folgt, bedeutet, so gibt das Glied, das dorten zuletzt hingeschrieben ist, mit dem nächstfolgenden dividirt $\frac{R}{S} \cdot x^{-d}$ Bey diesem Quotienten ziehe

man nur x und nicht die Coefficienten in Betrachtung. Wenn d eine bejahte Grösse und -d eine verneinte bedeutet, so ist x ein eigentlicher Bruch

x^{-d} oder $1 : x^{d}$

(12) und folglich ein uneigentlicher der desto grösser, je kleiner der Divisor, d. i. je höher die Potenz d dieses eigentlichen Bruches ist. (Ar. I. 76.) Bedeutet aber d eine verneinte und -d eine bejahte Zahl, so muß x eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher Bruch seyn, wovon die Potenz des bejahten Exponentens -d wieder desto grösser ist, je grösser dieser bejahte Exponent ist. In beyden Fällen ist also das folgende Glied desto weniger in Vergleichung mit dem vorhergehenden beträchtlich, je grösser d ist.

565. Aufg. Bey einer rationalen Gleichung, die zwo veränderliche Grössen enthält, die Gestalt der Reihe (628) oder m und d (645) zu finden.

Aufl. I) Man setze Ax^m statt y in die Gleichung; so verwandelt sie sich in einen Ausdruck, der nur x auf verschiedene Potenzen erhoben enthält.

II) Die Exponenten dieser Potenzen ordne man wie die Vielfachen von m und b (636) hier nähmlich ist $b = 1$;

III) Durch ein Paar der äuserſten so geordneten Exponenten lege man das Linial (636.)

IIII) Soll die Reihe steigen, (2) so wähle man dazu

dazu ein Paar der untersten Exponenten, das heißt, ein Paar, die so liegen, daß das Linial keine mehr antrifft, wenn es wie in 643 nach unten zu bewegt wird.

V) Soll sie fallen, so wähle man ein Paar der obersten.

VI) Man setze sie gleich, und bestimme daraus m wie in (650) geht das Linial zugleich durch mehr äuserste Exponenten, so wird einerley Werth von m, sie alle gleich machen.

VII) Dieses gefundene m setze man in die übrigen Exponenten.

VIII) Man suche den größten gemeinschaftlichen Unterschied der Werthe, welche herauskommen. Er wird d seyn.

VIIII) Die Coefficienten werden nach 631 bestimmt.

Exempel. Aus $y^3 + aay - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ wird vermöge I ein Ausdruck, wo x folgende Exponenten nach der Ordnung, in welcher die Glieder der Gleichung stehen, bekömmt:

3 m; m; o; m + 1; 3; welche man so ordnen muß (II)

3
*
*m + 1
o m * 3m

Für eine steigende Reihe (IIII) giebt (III) $o = m = 3m$ also nach (VI) $m = o$ (644); die Werthe (VIII) sind o; 1; 3; ihr größter gemeinschaftlicher Unterschied $1 = d$; also die Reihe $y = A + Bx + Cx^2 \ldots$

Newton aus dessen Method of Flux. Introd. §. 36. dieses Exempel genommen ist, findet $y = a - \frac{1}{4}x +$

$$\frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$$

Für eine fallende Reihe (V) ist $3m = 3$; also $m = 1$; die Werthe VIII sind 3; 2; 1; 0; also $d = -1$ und

$$y = Ax^{-1} + B + Cx^{-2} + Dx \ldots \text{u. s. w.}$$

Hier werden die Anfangsreihen (650) aus dem ersten und letzten Theile der Gleichung; Ich schreibe sie hier beyde zu oberst, und darunter nach der Ordnung, was aus dem zweyten, dritten, vierten Theile wird.

$$\left.\begin{array}{l} A^3 \\ -1 \end{array}\right\} \begin{array}{llll} x^3 & +3AABx^2 & +3ABBx & +B^3 \\ & & +3AAC & +6ABC \\ & & & +3AAD \\ & & +aaA & +aaB \\ & & & -2a^3 \\ & +aA & +aB & +aC \end{array}$$

Folglich ist $A = 1$; nebst zween unmöglichen Werthen; $B = -\frac{1}{3}a$; $3 \cdot \frac{1}{9}aa + 3C + aa - \frac{1}{3}aa = 0$ oder $C = -\frac{1}{3}aa$; $D = \frac{55}{81}a^3$ u. s. w.

Bew. Wenn man nach 649 verfährt, so enthält das erste Glied der Gleichungsreihe, lauter Theile, die nur durch A und bekannte Grössen gegeben werden, (650) also gibt das Verfahren I gewiß alle ersten Glieder der Anfangsreihen (650) und dabey noch erste Glieder anderer Reihen, welche sich von jenen dadurch unterscheiden, daß ihre Exponenten alle grösser oder kleiner sind. (650) Wenn

aber

aber für gegenwärtige Anwendung in 636; b = 1; so werden alle Exponenten nach III. grösser und nach V kleiner als die äuserſten, (643) folglich geben IIII; V; die erſten Exponenten der Aufangsreihen, und der Werth von m der daraus beſtimmt wird, daß man ein Paar der äuſerſten gleich geſetzt hat, macht alle gleich, die zugleich äuſerſte ſind, d. i. durch welche das Linial zugleich geht, (638) wie VI. erfodert.

Die übrigen Exponenten ſind die erſten ſolcher Reihen, die nicht die Anfangsreihen ſind, (650) und ſollen ſich alle mit den erſten der Anfangsreihen in einer arithmetiſchen Progreßion befinden. (662) Ihre Werthe ſind durch die Exponenten, welche x und y in der Gleichung haben, und durch das nur gefundene m gegeben, (636) und Werthe, an welche das Linial zugleich trifft, ſind gleich (638). Man muß alſo den Unterſchied einer arithmetiſchen Progreſſion ſuchen, in welcher ſich alle dieſe Werthe befinden können; und 664 zeigt den Grund von VIII.

666. Zweytes Exempel. $y^6 x^3 = \frac{y^5 x^5}{a} + x^6 y^3 - a^3 x^5 y + a^6 x^3 - a^7 xy + a^6 y^3 - a^3 xy^5 + a^3 x^3 y^3 = 0$; gibt nach 65 I folgende Exponenten; in der Ordnung, wie die Glieder ſtehen, $6m + 3$; $5m + 5$; $2m + 6$; $m + 5$; 3; $m + 1$; $3m$; $5m + 1$; $3m + 3$; die nach II ſo geordnet werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 3m+6 & & & \\
 & & & * & & & \\
 & & m+5 & * & * & 5m+5 & \\
 & & * & * & * & * & \\
 & 3 & * & * & * & * & 6m+3 \\
 & * & * & * & 3m+3 & * & * \\
 & * & m+1 & * & * & 5m+1 & * \\
 & * & * & * & 3m & * & * \\
\end{array}$$

Hier kann man folgende Bestimmungen machen:

Für aufsteigende Reihen

α) $6m+3=5m+1$; $m=-2$; die Werthe der Exponenten; -9; -8; -6; $d=+1$; $A^6-a^3A^5=0$; $A=a^3$; der Werth $A=0$ gilt hier nicht (661)

β) $5m+1=3m$; $m=-\frac{1}{2}$; die Werthe $-1\frac{1}{2}$; 0; $+\frac{1}{2}$; $d=\frac{1}{2}$; $-a^3A^5+a^6$ $A^3=0$; $A=\pm\sqrt{a^3}$.

γ) $3m=m+1$; $m=\frac{1}{2}$; die Werthe; $1\frac{1}{2}$; 3; $3\frac{1}{2}$; ... $d=\frac{1}{2}$; $-a^7A+a^6A^3=0$; $A=\pm\sqrt{a^3}$;

δ) $m+1=3$; $m=2$; die Werthe 3; 6; 7... $d=1$; $a^6x^3-a^7A=0$; $A=1:a$;

Für fallende Reihen. ε) $6m+3=5m+5$; $m=2$; die Werthe 15; 12; 11; $d=-1$ $A^6-A^5:a$; $A=1:a$; ζ) $5m+5=3m+6$

$3m+6$; $m=\frac{1}{2}$ die Werthe $7\frac{1}{2}$; 6; $5\frac{1}{2}$; . . .
$d=-\frac{1}{2}-A^5+A^3=0$ $A=\pm\sqrt{a}$;
$\theta)$ $3m+6=m+5$; $m=-\frac{1}{2}$; die Werthe
$4\frac{1}{2}$; 3; $2\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0; . . . $d=-\frac{1}{2}$; A^3-
a^3A; $A=\pm a\sqrt{a}$; $\eta)$ $m+5=3$; $m=-2$;
die Werthe 3; 0; -1; . . . $d=-1$;
$-a^3A+a^6=0$; $A=a^3$;

667. Zus. Jedem x gehören soviel Werthe von y zu, soviel y Abmessungen hat (223). Da nun jedes x in jede Reihe gesetzt nur einen Werth von y geben kann; so folgt schon hieraus, daß diese Methode soviel steigende, auch soviel fallende Reihen geben muß, soviel y Abmessungen hat. Im Exempel 666 giebt es sechs Werthe von A für steigende Reihen, zween aus α; δ; vier aus β; γ; wie auch sechs Werthe von A für fallende Reihen; zween aus ε; η; vier aus ζ; θ; Jeder Werth von A, bestimmt andere B; C; und giebt also eine andere Reihe.

668. Zus. Folgende Betrachtungen zeigen, wie solches aus der Methode fließt. Wenn ein Paar äuserste Exponenten $m\alpha+\beta=mx+\tau$ einander gleich gesetzt werden, so gibt dieses nach 665. I. VIIII; für A eine Gleichung, wo die Potenzen von A folgende α; x; sind; Befinden sich äuserste Exponenten in der geraden Linie, die alle übrigen Exponenten auf einer Seite liegen hat, so sey $m\alpha+\beta$ der höchste in dieser Linie, $mx+\tau$ der nie-

niedrigste; also unter denjenigen Theilen der Gleichnng, welche die Anfangsreihen geben, der höchste, welcher die Potenz α von y; der niedrigste, welcher die Potenz $\varkappa$ hat, man beurtheilet ihre Höhe hier nur nach y nicht nach x; weil man y eigentlich als die unbekannte Grösse ansieht, die durch x gefunden wird. Solchergestalt hat A in der Gleichung, wodurch es bestimmt wird, allemahl $\alpha - \varkappa$ Werthe.

669. Zus. Nun habe überhaupt die höchste Potenz von y die in der Gleichung befindlich ist, den Exponenten α; und sey in die Potenz β von x multiplicirt. Es muß in der Gleichung auch Glieder geben, die kein y enthalten, denn sonst liessen sich alle Glieder mit x dividiren. Unter diesen Gliedern enthalte dasjenige, das die niedrigste Potenz von x enthält, die Potenz γ; Man kann die Gleichung, wenn sie auch x irgendwo in einem Divisor hätte, allemahl nach (192. I.) in eine verwandeln, wo nirgends x im Divisor ist; also kann man allemahl annehmen, γ sey entweder bejaht, oder $= o$ wenn sich ein ganz beständiges Glied in der Gleichung befindet. Dieses zum voraus gesetzt, ordne man die Exponenten, wie sie aus der Gleichung nach 665. I; entstehen; nach 665 II; Keiner kann rechter Hand des Exponentens $m\alpha + \beta$, oder so liegen, daß eine Linie von $m\alpha + \beta$ nach ihm zugezogen, nach der rechten Hand von $m\alpha + \beta$ ginge; weil die Vielfachen von m nach der rechten Hand zu wachsen, und α der höchste Exponent von y; folglich

$m\alpha$

$m\alpha$ das größte Vielfache von m ist. Da auch vorausgesetzt wird, daß alle Potenzen von y in der Gleichung bejahte Exponenten haben, so giebt es keine Vielfache von m durch verneinte Zahlen, folglich liegt kein Exponent unter den geordneten linker Hand von y. Nun mag die Gleichung so viel äusere Exponenten geben als man will, die sich folgendergestalt vorstellen lassen:

$$\begin{array}{l} y \\ \qquad m\alpha + \beta \\ m\lambda + \mu \\ \qquad m\varkappa + \tau \end{array}$$

Ein Linial durch jedes Paar der hier hingeschriebenen Exponenten gelegt, hat also allemahl alle übrigen Exponenten nicht nur die hier hingeschrieben, auf einer Seite. Ich nehme noch an, daß in der geraden Linie durch ein Paar solche Exponenten allemahl einer der höchste, der andere der niedrigste, ist (668) oder daß alle übrigen Exponenten, die zugleich mit diesem Paare in eine gerade Linie fallen, zwischen dieses Paar fallen. Nun kann man folgende Lagen des Linials annehmen:

	giebt Werthe für A:
$m\alpha + \beta = m\varkappa + \tau$	$\alpha = \varkappa$
$m\varkappa + \tau = m\lambda + \mu$	$\varkappa = \lambda$
$m\lambda + \mu = \gamma$	λ

Wenn man also durch alle Paare äuserster Exponenten herumgeht, so erhellt, daß die Werthe von A,

die sich aus allen zusammen geben; $\alpha - \varkappa + \varkappa - \lambda + \lambda = \alpha$ seyn werden, d. i. soviel, soviel Einheiten der Exponent der höchsten Potenz von y hat. Diese Schlüsse gelten, die äusersten Exponenten mögen die untersten oder obersten seyn, und beweisen also die Sache einmahl für die steigenden un einmahl für die fallenden Reihen.

Anm. Unter diesen Werthen von A, können auch gleiche seyn, die, einer und der andere eben dieselbe Reihe gäben. In diesem Falle wird einer der folgenden Coefficienten mehr als einen Werth bekommen.

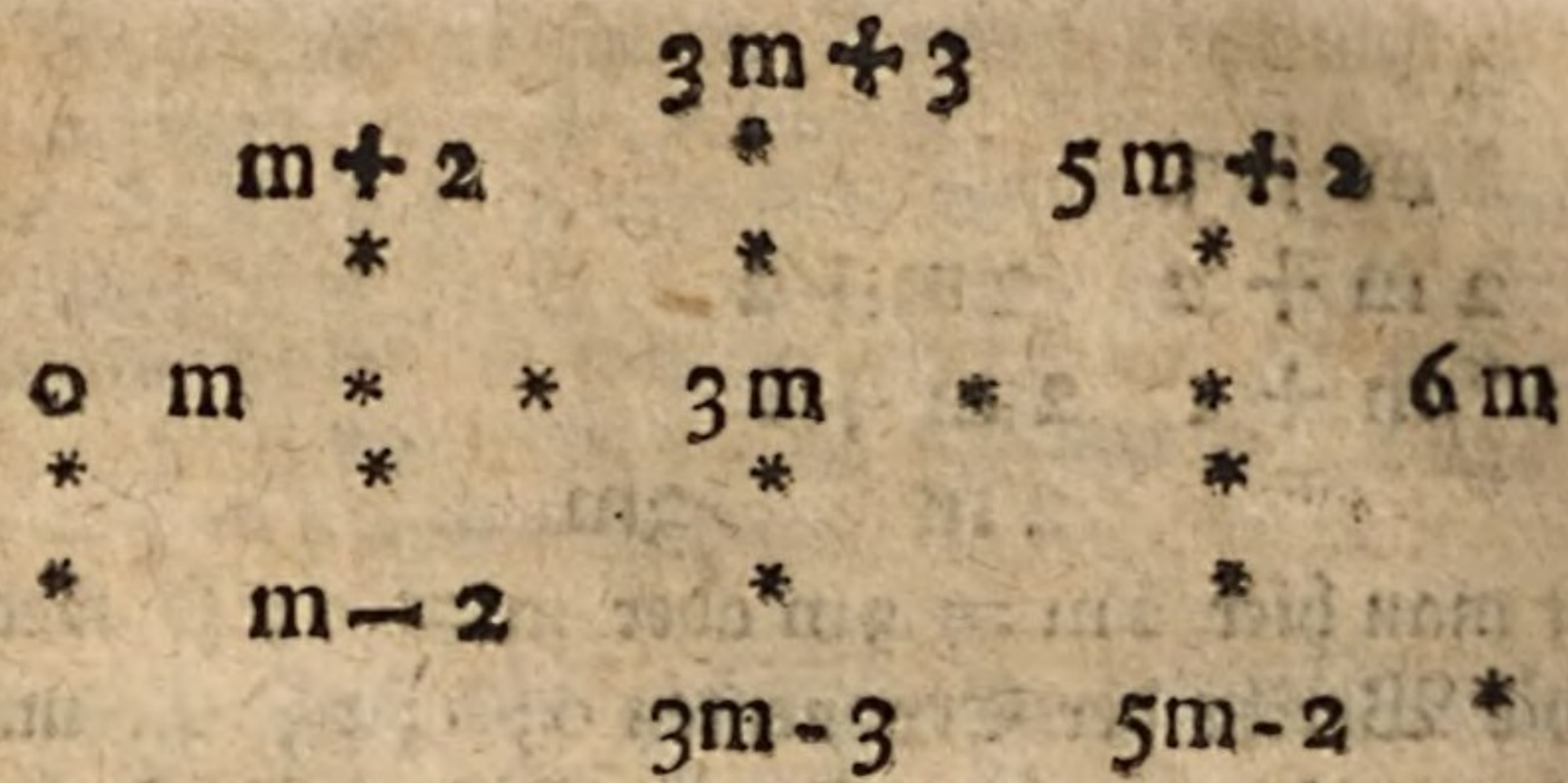
So verhält es sich in den Exempel 660; VIIII; y hat in der dasigen Gleichung für jedes x zweene Werthe; aber A bekömmt zweene gleiche Werthe, daher bekömmt B zweene ungleiche Werthe, deren jeder einen eigenen für y giebt.

670. Zus. Die Voraussetzung, daß x lauter bejahte Exponenten haben soll, ist allemahl möglich, aber nicht nothwendig. Denn die Schlüsse, welche sich auf 648 beziehen, und die Gründe dieses Verfahrens enthalten, setzen nirgends zum voraus, daß τ; η; μ; π; lauter bejahte Zahlen sind. Von den Exponenten von y muß ich dieses hier annehmen, weil sich das Verfahren auf den binomischen Lehrsatz gründet, den ich bisher nur unter solchen Einschränkungen erwiesen habe. (141)

671. Exempel. Die Gleichung 666 liesse sich auch so ausdrücken:

$$y^6 - y^5 x^2 : a + x^3 y^3 - a^3 x^2 y + a^6 - a^7 y x^{-2} + a^6 x^{-3} y^3 - a^3 y^5 x^{-2} + a^3 y^3 = 0;$$

da säyen die geordneten Exponenten so aus



Da gäbe es folgende Lagen des Linials für steigende Reihen, α) $6m = 5m-2$; β) $5m-2 = 3m-3$; γ) $3m-3 = m-2$ δ) $!m-2 = 0$;
Für fallende Reihen ε) $6m + 5m + 2$; ζ) $5m + 2 = 3m + 3$ θ) $3m + 3 = m + 2$; ϗ) $m + 2 = 0$

Diese Gleichungen sind mit denen einerley, welche mit eben den griechischen Buchstaben 666 sind genannt worden, und geben folglich eben die Werthe für m; d; A; jede Gleichung 666 verwandelt sich in die ihr gleichgültige hier, wenn man auf jeder Seite von ihr 3 abzieht, so wie die Gleichung zwischen x und y; 666 sich in die gegenwärtige verwandelt, wenn man alle ihre Glieder mit x^3 dividirt.

672. Zus. Wenn es eine endliche Reihe für y giebt, so findet man sie auch auf diese Art. Es sey $(y - a + xx : b).(yy - xy + xx) = yy + (xx + ax - x^3 : b)\ y - ax^2 + x^4 : b = 0$;
die Exponenten stehen so

4
*m+3
2m+2 2m+2
*m+1 2m+1
* * 2m 3m

Setzt man hier 2m = 3m oder m = o; so werden die Werthe der Exponenten o; 1; 2; ... und d = 1; und $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ Da findet man denn A = a; B = o; C = — 1: b und D mit allen folgenden Coefficienten = o; wie der erste Factor erfodert. Will man versichert seyn, daß die Reihe solchergestalt abbrechen (abrumpi) soll; so ist nicht genug, daß etwa ein Coefficient von ihr = o wird, wie hier schon mit B geschahe, sondern man muß aus der Beschaffenheit der Gleichung sehen können, daß sich dieses mit allen folgenden Coefficienten ereignen muß. Man kann auch den gefundenen Werth statt y setzen, zu sehen, ob er der Gleichung völlig genug thut.

673. Zus. Giebt es für jedes x: unmögliche y; so kann es nicht soviel möglicheReihen geben; soviel Abmessungen y hat. Allsdenn können Werthe von A unmöglich werden, und diese geben Reihen für die unmöglichen Werthe von y. Weil es nun soviel steigende, und soviel fallende Reihen giebt, soviel Abmessungen y hat, (669) so können soviel Werthe von A für die steigenden Reihen unmöglich werden, soviel unmögliche y jeden x zugehören, und eben soviel Werthe von A für fallende Reihen müssen auch unmöglich seyn.

So

So verhält es sich im Exempel 665; und in 672; wenn man $2 = m + 1 = 2m$ setzt: Da $A = (1 \pm \sqrt{-3}):2$ und $B; C;$ u. s. w. $= o$ sind, weil des andern Factors Wurzel $y = (1 \pm \sqrt{-3}) \cdot x: 2$ ist. Aus eben der Ursache findet sich eben der Werth von A; und $B; C; \ldots = o$ wenn man eine fallende Reihe aus $4 = m + 3 = 2m + 2$ suchte.

674. Zus. Es giebt aber auch Fälle, wo A unmögliche Werthe bekömmt, obgleich nicht nothwendig jedem x unmögliche y zugehören. Dieses kann sich ereignen, wenn die Reihe, deren erster Coefficient A ist, wofern sie sich nähern soll, solche x erfodert, die etliche oder alle y unmöglich machen.

Exempel. $yy + 2ay + xx = o$; giebt

$$2$$
$$* \quad *$$
$$* \; m \quad 2m$$

Für $2m = 2$ wird $m = 1$; und $y = x\sqrt{-1} - a + aa : 2x\sqrt{-1} * + a^4 : 8x^3\sqrt{-1} \ldots$ Diese Reihe setzt nähmlich, wenn sie sich nähern soll $x < a$ zum voraus; (2) aber $y = -a \pm \sqrt{(aa - xx)}$ wird eben für solche Werthe von x unmöglich, wie zur Näherung der Reihe erfodert werden. Für die andern beyden Fälle, $2 = m$, $m = 2m$; bekömmt man zwo mögliche Reihen, weil sie sich nähern, wenn $x < a$.

675. Zus. I. Ob Werthe von A aus der Ursache 673 oder aus der 674 unmöglich werden, läßt sich daraus beurtheilen, ob gleich viel Werthe von

A für steigende und für fallende Reihen unmöglich sind (673) oder nicht. (674)

II. Es können aber Werthe von A möglich seyn, und doch Reihen unmöglich werden von denen sie die ersten Coefficienten sind, wenn nähmlich folgende Coefficienten unmöglich werden.

Aus der Gleichung 660; VI findet man $y = (2aa - xx \pm \sqrt{(-4aaxx - 2ax^3 + x^2)}) : 2a$ welches unmöglich wird, wenn die Grösse unter den Wurzelzeichen verneint wird, oder auch wenn $-4a^2 - 2ax + x^2$ verneint wird; und dieses geschieht für alle bejahte und verneinte Werthe von x die zwischen $a(1 + \sqrt{5})$ und $a(1 - \sqrt{5})$ fallen. Daher giebt es hier keine steigende Reihen, weder für bejahte noch für verneinte x; (674) und weil der Werth von A die Unmöglichkeit der steigenden Reihen nicht anzeigt, so wird B unmöglich.

III. Wenn aber m oder d ein Bruch ist, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, und also in der Reihe für y, Wurzeln von geraden Exponenten auszuziehen vorkommen; so können Glieder der Reihe, die für einen gewissen Werth vou x möglich sind, für den gleichen und entgegensetzten Werth unmöglich seyn. Dergleichen Grössen nennt Cramer Analyse des lignes courbes §. 95. halb unmöglich; (demi imaginaires) $\sqrt{-ax}$ ist ein Exempel davon, welche Grösse möglich oder unmöglich ist, nachdem x verneint oder bejaht ist.

IIII.

IIII. Für die Gleichung $x^2 - 2xy + yy + x^2$ $y = 0$ giebt das Parallelogramm $y = Ax +$ Bx^2 . . . und die Gleichungsreihe (649) wird

$$\begin{array}{llll} & x^2 & & \\ -2A & & -2Bx^3 & \ldots \\ +AA & & +2AB & \\ & & +A & \end{array}$$

wo zweene Werthe von $A = 1$; also $-2B +$ $2B + 1 = 0$ welches das Ungereimte $1 = 0$ gäbe. Daher kann die Reihe für y nicht gebraucht werden, und keine andere steigende ist nicht zu finden.

V. Man seße in der Gleichung (734) $y = x + u$ so verwandelt sie sich in $uu + x^3 + x^2 u = 0$.

Ist hier $u = \alpha x^{x} + \beta x^{x+\delta}$ . . . so giebt das Parallelogramm $u = \alpha x^{3:2} + \beta x^2$ . . . und wenn man diese Reihe in gegenwärtige Gleichung seßt, findet sich nach (631) $\alpha = \pm\sqrt{-1}$; $\beta = -\frac{1}{2}$ also giebt es zwo Reihen für u die hier das doppelte Zeichen zusammeu anzeigt

$$u = \pm\sqrt{-1}.\sqrt{x^3} - \frac{xx}{2} \mp \frac{x^2\sqrt{x}}{8\sqrt{-1}} \ldots$$

Man wird leicht sehen, daß die Coefficienten bey den Potenzen von x deren Exponenten Brüche sind unmöglich werden; jede solche Potenz läßt sich durch ein Product aus einer Potenz von x deren

Expo-

Exponent eine ganze bejahte Zahl ist, in $\sqrt{x}$ ausdrücke. Der übrigen Potenzen Coefficienten sind möglich.

VI. Diese beyden Reihen sind allemahl und nur möglich, wenn x eine verneinte Grösse ist, denn da wird sich jedes Glied das einen unmöglichen Coefficienten hat, durch ein Product aus was möglichem in $\sqrt{-x}$ ausdrücken lassen, das erste ist $x\sqrt{-x}$; das dritte $\frac{\mp x^2\sqrt{-x}}{8}$ u. s. w. Die Gleichung giebt nähmlich $u = (-xx \pm x\sqrt{(xx-4x)}) : 2$ welches unmöglich wird, wenn x bejaht und > 4 ist, daß es also keine steigende Reihe für bejahte x geben kann: (674) Aber jedes verneinte x macht u möglich, also giebt es zwo steigende Reihen (667), für verneinte x.

Also ist in IIII; $y = x \pm \sqrt{-x^3} - \frac{1}{2}xx \ldots$

VII. Dieses scheint IIII; zu widersprechen, oder man kann wenigstens fragen, warum das Parallelogramm diese Reihe nicht giebt. Folgende Betrachtung wird gleich anfangs das Parallelogramm von allen Verdachte einer Unrichtigkeit befreyen: In der Reihe für y die man IIII; findet, wird d nach 665; VIII bestimmt, wovon die Ursache in 664 liegt, damit man auch unten 680 vergleichen kann. Aber diese beyden §. §. setzen zum Voraus, daß jeder Coefficient der Reihe y, aus dem Coefficienten der Gleichungsreihe bestimmt wird, wo er zum erstenmahle vorkömmt, (man s. 656; 657.)

und

und daß man allemahl die schon bestimmten Coefficienten der Reihe y braucht, die folgenden zu bestimmen. Diese Voraussetzungen können in Fällen die 660; 661; anzeigen, irrig seyn. Wenn in einem Coefficienten der Gleichungsreihe, dasjenige, was den Coefficienten der Reihe y der aus ihm bestimmt werden sollte, enthält, sich für sich selbst aufhebt, (wie — 2 B + 2 A B in IIII) so muß das übrige (wie A daselbst) entweder für sich = 0 seyn, da denn der Coefficient der Reihe y unbestimmt bleibt, oder die Voraussetzung, daß der ganze Coefficient der Gleichungsreihe = 0 seyn soll findet nicht statt, und also läßt sich das, was 656; 657; voraus setzt, da nicht anbringen, daher denn die Regel 665; VIII hier wegfällt. Uebrigens sind die Werthe der Fächer (665; VI; VII;) in IIII; folgende 2 m = m + 1 = 2 und m + 2 welches 3 giebt. Also kann man für die Reihe der Exponenten jede annehmen, in der die Zahlen 2 und 3 enthalten sind, folglich auch die Reihe 1; $1\frac{1}{2}$; 2; welches eben die ist, die man in VI. findet. Folglich giebt das Parallelogramm auch diese Reihe an, wenn man die Regel 665; VIII hier beyseite setzt, die wie 680 erinnert, ein Rath, nicht ein unverletzlicher Befehl ist.

Ueberdieß, ist die Absicht des Parallelogramms nur, m und d so zu bestimmen, daß alle einzelne Reihen der Theile der Gleichung (649) zusammen eine Gleichungsreihe ausmachen (siehe 662). Dieses nun findet auch bey der Reihe für y IIII; statt.

Daß sich aber hiebey die ungereimte Folge $1 = 0$ findet, das kömmt auf die Coeffizienten der Gleichung an, (661) und das Parallelogramm kann hiebey nichts thun, da eine kleine Veränderung der Gleichung dieses ändern würde; denn wenn sie nur $+ 2xy$ hätte alles übrige aber wie vorhin bliebe, so würde der zweyte Coefficient der Gleichungsreihe $+ 2B + 2AB + 2AB + A$ also $B = -\frac{1}{4}$. Das Parallelogram hat nähmlich blos mit den Exponenten zu thun, die bey andern Coefficienten der Gleichung doch eben dieselben bleiben können.

VIII. Wie man sich bey einer solchen Schwierigkeit zu helfen hat, wird folgendes Verfahren zeigen:

Man setze $y = px^{\varepsilon} + qx^{\varepsilon+\pi} \ldots$

so ist $x^2 = x^2$

$$-2xy = -2px^{\varepsilon+1} - 2qx^{\varepsilon+\pi+1} \ldots$$

$$+yy = p^2x^{2\varepsilon} + 2qpx^{2\varepsilon+\pi} \ldots$$

$$+x^2y = +px^{\varepsilon+2} + qx^{\varepsilon+\pi+2} \ldots$$

Da muß man nun etliche Reihen zu Anfangsreihen (650) wählen. Man wähle dazu die ersten Glieder der Reihen x^2; $-2xy$; yy; so findet sich $\varepsilon = 1$; Auch kann man, wenn die Reihe für y steigen, oder δ bejaht seyn soll; keine andere Anfangsreihen wählen. Denn wollte man yy und xxy dazu nehmen, also $\varepsilon + 2 = 2\varepsilon$ setzen, so käme $\varepsilon = 2$ und $\varepsilon + 2 = 2\varepsilon = 4$ & $\varepsilon + 1$ und & 2

daß

daß also die ersten Glieder der Reihen yy; xxy, nicht am Anfange der Gleichungsreihe stünden, weil der übrigen Reihen erste Exponenten kleiner wären. Diese Voraussetzung nun $\varepsilon = 1$ giebt folgendes:

$$xx = x^2$$

$$-2xy = -2p - 2qx^{2+\pi} - 2rx^{2+2\pi}$$
$$+yy = +pp - 2pq + qq + 2pr$$

$$+xxy = +px^3 + qx^{3+\pi} \ldots$$

Hier kömmt es nun darauf an, unter welches Glied der obern Reihen man das erste der Reihe xxy setzen will, als wodurch der Werth von δ bestimmt wird. Wollte man es unter die zweyten Glieder, oder $2+\pi = 3$ also $\pi = 1$ setzen, so geriethe man auf das Verfahren (IIII). Man setze es also auf das dritte, oder $2+2\pi = 3$; so ist $\pi = \frac{1}{2}$ und weil $p = 1$ war; $qq+1 = 0$; daß man also die Reihe VI. findet.

VIIII. Die Exempel 660; VI; u. 675. IIII. finden sich beym Cramer Anal. des Courbes §. 104. die Erinnerungen, zu denen sie mich veranlaßt haben, berechtigten mich sie hier beyzufügen. Wer übrigens einerley Gleichung nach Cramers Art, und nach der vorhin gelehrten auflösen will, wird selbst urtheilen, wo die Rechnung ordentlicher und kürzer geführt wird.

676. Anm. Wenn man für A eine sehr zusammengesetzte, oder Irrationalgrösse bekömmt, so kann man, die Rechnung zu erleichtern, in den Ausdrückungen der andern Coefficienten den Buchstaben A beybehalten, und den gefundenen Werth erstlich brauchen, wo er zur Anwendung nöthig ist.

677. Anm. Ueberhaupt ist es oft bequem, jeden Coefficienten durch die vorhergehenden selbst, z. E. B durch A; C durch B; A; u. s. w. auszudrücken, ohne daß man die Werthe von A; B; C; wie sie sich wirklich finden lassen, aus einander setzt. Dieses dient oft, das Gesetz nach welchem die Coefficienten fortgehen leichter zu entdecken.

678. Anm. Eine Foderung bey diesem Verfahren ist, daß man bestimmte Gleichungen von jedem Grade auflösen könne, weil A durch solche gegeben wird. (652) Indessen kann A in seiner Gleichung niedriger seyn, als y in der zwischen den beyden veränderlichen Grössen, wie 666 davon Exempel giebt. Auch wird die Gleichung für A meistens weniger Theile enthalten als die Gleichung zwischen den beyden veränderlichen Grössen, weil ordentlich nicht alle Theile dieser letzten Gleichung Anfangsreihen geben. Fände sich dieses, so bestünde der Werth von y aus einem einzigen Gliede, (657) dessen Coefficient A freylich durch keine einfachere Gleichung gegeben werden könnte, als die ist, welche y durch x giebt.

679. Anm. Eine andere Foderung ist, den grösten gemeinschaftlichen Unterschied einer gegebenen Menge von Zahlen zu finden. Weil hier unter diesen Zahlen auch eigentliche und uneigentliche Brüche, und verneinte seyn können, und ihre Menge unbestimmt ist, so würden Vorschriften zur allgemeinen Auflösung dieser Aufgabe weitläuftig werden; die beygebrachten Exempel aber zeigen, daß sich solches gar leicht bewerkstelligen läßt.

680. Anm. Diese Foderung (679) ist nur deßwegen gethan worden, damit sich die Reihe aufs schnellste nähern sollte. (664) Gesetzt d sey der größte gemeinschaftliche Unterschied, und δ ein kleinerer; der aber so bestimmt werden muß, daß wenn Φ; γ; ganze bejahte Zahlen sind $m\varkappa + \tau + \Phi\delta = m\varkappa + \tau + fd$ (662) oder $\Phi\delta = fd$; und eben so $\gamma\delta = gd$ u. s. w. und man nähme an $y = Ax^{m} + bx^{m+\delta} + cx^{m+2\delta}$ so scheint es, als würde man eine andere Reihe statt der 645 bekommen, die sich nur langsamer nähern würde. Aber die Rechnung wird zeigen daß bey einer solchen Reihe b; c; u. s. w. $= o$ seyn werden, und daß diese neue Reihe keine andern wirklichen Coefficienten noch Exponenten haben wird, als die 645; oder daß sie mit ihr einerley seyn wird. Die Sache wird sich ohngefähr wie 657 erweisen lassen; ich will aber hier mich damit nicht beschäfftigen, da ich schon von dem Newtonischen Parallelogramm so weitläuftig gehandelt habe, und der Beweis dieses Umstandes zum Gebrauche nicht erfordert wird. Ein solcher Beweis würde nur zeigen, daß man etwas nicht einmahl thun kann, welches man schon wegen 665; VIII. nicht thun soll.

Exempel. In 675 sind für $m = 2$; die Werthe 2; 4; also nach 665; VIII; $d = 2$; Man nehme $\delta = 1$; oder $y = Ax^2 + bx^3 + Bx^4 + cx^5 + Cx^6 \ldots$ so kömmt

$$+2A^{x^2} + 2Ab\,x^3 + 2aBx^4 + 2ac\,x^5 \ldots$$
$$+AA \quad +2Ab \ldots$$

also $A = \frac{1}{2}$; $b = 0$; $B = -\frac{1}{8a}$; $c = 0$;

u. s. w. oder die Reihe für $\delta = 1$ wird mit der Reihe für $d = 1$ einerley.

681. Zus. Ist es im binomischen Lehrsatze (141) erlaubt, statt m eine gebrochne, oder verneinte Zahl zu setzen, auf welche Vermuthung uns (630) leiten könnte, so wird sich dieses ganze Verfahren auch anbringen lassen, wenn die Gleichung zwischen x und y; auch in Absicht auf y nicht rational ist. Denn daß k; (645;) $\varkappa$; ε; λ; ϱ; (648) ganze bejahte Zahlen seyn sollten, habe ich nur deßwegen angenommen, weil ich den binomischen Lehrsatz bisher nur noch unter diesen Einschränkungen erwiesen habe.

682. Zus. Will man sich diese Erweiterung des binomischen Lehrsatzes verstatten, wie sie denn in der That unten soll gerechtfertiget werden, ohne daß sich die Rechtfertigung auf das Gegenwärtige gründete, so wird nöthig seyn, eine Regel zu geben, wie man das Parallelogramm hier zu gebrauchen hat. Ich habe keine anderswo gefunden; und Newton Meth. of Fl. Intr. §. 25; 26; befiehlt gebrochne und verneinte Exponenten durch die bekannten Kunstgriffe wegzuschaffen, welches Colson in s. Erläuterung über diese Absätze für unnöthig erklärt, aber keine besondere Regel dazu lehret. Mir scheint folgende zulänglich: Man bringe alle gebrochne Exponenten von x die sich in der Gleichung befinden, auf einerley Benennung; den Bruch,

dessen Zähler 1; und der Nenner der gefundene gemeinschaftliche Nenner ist, nehme man für b (636) an; so wie bisher b = 1 war, wenn x lauter ganze Exponenten hatte. Den Bruch, dessen Zähler 1; der Nenner; der gemeinschaftliche Nenner aller gebrochnen Exponenten von y in der Gleichung ist, multiplicire man in n; und brauche dieses Product, wie m (636) so ist $y = Ax^{n} + Bx^{n+d} \ldots$ wo übrigens wie vorhin verfahren wird.

683. Exempel. $x^5 - 4x^4y^{1:2} + 6x^3y - 4x^2y^{3:2} + yyx + 10x^{1:3} - 6y^{1:2} = 0$; die Exponenten stehen nach meiner Regel so

$\frac{15}{3}$
$\frac{1}{2}n + 4$
$n + 3$
$\frac{3}{2}n + 2$
$2n + 1$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}n$

Aus $\frac{15}{3} = 2n + 1$ finde ich $n = 2$ und die Werthe werden 5; 1; $\frac{1}{3}$; also $d = -\frac{2}{3}$ und $y = Ax^2 + Bx^{4:3} + Cx^{2:3} \ldots$

684. Zweytes Exempel. $y^{5:2} + x^{7:4} - y^{2:3} - y^{1:7}.x^{3:11} + x^{3:5} - y^{-6:5} = 0$.

Wenn man hier Ax^n statt y setzt, so kommen die

Exponenten nach der Ordnung $\frac{5}{2}n$; $\frac{7}{4}$; $\frac{2}{3}n$; $\frac{1}{7}n + \frac{2}{4}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{6}{5}n$; Die Brüche, bey welchen sich n als ein Factor befindet, d. i. die Exponenten von y; auf einerley Nenner gebracht, und die Brüche, bey welchen sich n nicht als ein Factor befindet, d. i. die Exponenten von x, auch unter sich auf einerley Nenner gebracht, erhällt man folgende Ordnung:

$$\frac{385}{220}$$

$$\vdots$$

$$\frac{132}{220}$$

$$\vdots$$

$$\ldots\frac{30}{210}m + \frac{60}{220}$$

$$-\frac{225}{210}m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{140}{210}m \ldots\ldots \frac{625}{210}m$$

685; Zus. Will man dieses Verfahren brauchen, so muß man öfters die Reihe $Ax^n + Bx^{n+d}$ . . . auf Potenzen von verneinten und gebrochnen Exponenten erheben, welches etwas unbequem fällt, wenn man sich auch gleich dabey der binomischen Formel, nach (682) bedienen will; auch kann hier A möglich seyn, und doch B; C; u. d. g. unmöglich geben; wenn nähmlich A eine verneinte Grösse

ist,

ist, und y auf Potenzen von gebrochnen Exponenten deren Nenner gerade ist, erhoben wird.

686. Anm. Gravesand de determinanda forma seriei infinitae cet. welche Abhandlung sich bey seinen Elementis Matheseos vniuersalis befindet, hat den Gebrauch des Newtonischen Parallelogramms auch gelehret, aber nichts erwiesen. Stierling welcher eben das gethan hat, giebt nach Gravesands Erinnerung eine unvollständige Regel an, die Gestalt der Reihe zu bestimmen, und richtet seine Absicht vornehmlich auf die Bestimmung von d. Aber nach Graves. Regel, die er für vollkommen hält, findet er in dem Exempel (683) statt d; die Grösse $\frac{1}{3}$; und setzt also $y = Ax^2 + Bx^{5:3} + Cx^{4:3}$ &c. Daß er auf diese Art wieder 680 fehlt, zeigt die Rechnung; denn nach ihm wäre $y^{\frac{1}{2}} = A^{1:2} . x + \frac{1}{2}A^{-1:2} . B . x^{2:3}$ und $y^{3:2} = A^{3:2} x^3 + \frac{3}{2} . A^{1:2} . Bx^{8:3}$ also, die Coefficienten der Reihe so unter einander geschrieben, wie die Theile der Gleichung (683) folgen:

$$\left.\begin{array}{r} 1 \\ -4\sqrt{A} \\ +6A \\ -4A\sqrt{A} \\ +AA \end{array}\right\} x^5$$

$$\left.\begin{array}{r} -2A^{1:2}B \\ +6B \\ -6B\sqrt{A} \\ +2AAB \end{array}\right\} x^{14:3}$$

$$+10x^{1:3}$$

$$-6Ax^{1:2}$$

Hier ist B = o und Gravesand nimmt also diesen Coeffi-

cienten nach seiner Regel überflüssig an; Er hätte nähmlich $d = -\frac{2}{3}$ und nicht $-\frac{1}{3}$ annehmen sollen.

687. Zus. Wenn nach 665. I. und 648; $A^{\varkappa} x^{m\varkappa+\tau} + \frac{p}{q} A^{\varepsilon} x^{m\varepsilon+\eta} = 0$; so ist auch $y^{\varkappa} x^{\tau} + \frac{q}{p} y^{\varepsilon} x^{\eta} = 0$; nur y statt Ax^{m} gesetzt.

Hier bedeutet y das erste Glied der Reihe ⊙, welches man also aus der Gleichung selbst finden kann, wenn man sie in die Fächer des Parallelogramms setzt. Wenn $= x^3 * axy \dagger y^3 = 0$ so ordne man diese Gleichung folgender Gestalt.

x^3
$*\ axy$
$*\ \ *\ \ *\ \ y^3$

Die äussersten Fächer $x^3 = axy$ gesetzt, bekömmt man $y = xx : a$ für das erste Glied der gesuchten Reihe. So trägt Newton a. a. O. 29 §. die Regel vor. Die Gleichung wird auf diese Art doppelt geordnet, (2) einmahl nach x das anderemahl nach y. In das Fach ○ des Parallelogramms (636) kömmt das ganz beständige Glied, wenn sich eines in der Gleichung befindet, in die Fächer m; 2m; kommen die Potenzen von y nach der Ordnung, und in die Fächer b; 2b; ... die Potenzen von x; soviel als derselben vorhanden sind.

688. **Anm.** Das Parallelogramm auf die nur erzählte Art ausgefüllt, hat der Herr Abt de Gua Usage de l'Analyse de des Cartes ponr decouvrir les proprietés des lignes geometriques de tous les ordres so gelegt, daß die Diagonale durch das Fach, in welches die beständige Grösse gehöret, vertical wird, und dieses Fach zu unterst zu stehen kömmt. So kommen allemahl alle die Theile der Gleichung in eine Horizontallinie, in denen x und y zusammen eine gleich hohe Abmessung ausmachen, z. E. in der nächsten Horizontallinie über dem untersten Fache stehen x; y; in der nächsten darüber xx; xy; yy; u. s. w. Diese Theile befinden sich bey der Newtonischen Lage des Parallelogramms in Linien, die mit der andern Diagonale, nicht mit der, welche hier vertical steht, parallel gehen. Dieser wichtige Vortheil, hat Herrn Cramer; introd. à l'Analyse des lignes courbes, pref. veranlaßt, Herrn Guas Einfall einen sehr glücklichen zu nennen, daß er ein Ding auf die Spitze gestellt hat, das bisher auf einer Seite gestanden hatte.

689. Zus. Vermittelst des Parallelogrammes lassen sich die Ordinaten einer krummen Linie durch die Abscissen ausdrücken. Daher ist begreiflich, wie es dienen kann, die Eigenschaften der krummen Linien zu entdecken. Newton hat vermuthlich auf diese Art das gefunden, was er in seiner enumeratione linear. tertii ordinis gelehrt hat. Stierling hat sich desselbelben nachgehends zu eben der Absicht bedient, und Cramer diese Anwendung, aber unter der Lage, die Herr Gua ihm gegeben hatte, in seinem genannten Werke allgemein gemacht. Ich finde nicht, daß diese veränderte Lage vorzüglich zu so viel Bequemlichkeiten verhelfe. Wenigstens habe

ich,

ich, ehe mir noch Cramers Werk in die Hände kam, keine Unbequemlichkeiten bey dem Gebrauche des Parallelogramms finden können, als ich durch solches den Beweis verschiedener allgemeinen die krummen Linien betreffenden Sätze suchte, die mir nöthig schienen, um von Herrn Eulers Vortrage; im II. B. der Introd. in Analys. inf. vollkommen überzeugt zu seyn. Ich muß dieses wohl hier zu meiner Entschuldigung erwähnen, weil ich das Parallelogramm in seiner alten englischen, und nicht in der neusten französischen Lage vorgestellt habe.

Herr M. J. G. Pfeiffers Aequationum speciosarum resolutio per Series ope parallelogrammi Newtoniani Tub. 1765. 56 Quartf. 1. Kupfertafel erläutert das was ich bisher abgehandelt, habe mit vieler Einsicht und Scharfsinnigkeit, und enthält auserdem lehrreiche Untersuchungen, die mir hier beyzubringen der Platz nicht verstattete, auch Anwendungen auf krumme Linien. Hr. Holland hat ebenfalls zu Tübingen den Innhalt des Kästnerischen Vortrages von newtonischen Parallelogram herausgegeben, woraus man den Zusammenhang der Sätze in der Kürze übersehen kan.

Die Umkehrung der Reihen.

(Reuersio serierum)

690. Aufg. Es sey $x = gy^{\lambda} + hy^{\lambda+\delta} \cdot \cdot \cdot$ ohne Ende, daß x durch eine Reihe von y gegeben

geben ist, da die Exponenten in einer Progression fortgehen, deren Unterschied δ ist. Man sucht y durch eine Reihe von x.

Aufl. Die Vorschrift 665 I; II; giebt

$$1 \quad * \ldots \lambda m \ldots (\lambda + \delta) m \ldots .$$

Weil die Vielfachen von m hier ohne Ende fortgehen, so kann man keinen äußersten Exponenten zur rechten Hand annehmen, Auch kann man nicht alle Exponenten in der untern wagrechten Reihe gleich, oder $m = o$ setzen; denn da müßte man, A zu finden eine Gleichung von unzählich viel Abmessungen auflösen. Also ist nichts übrig als $\lambda m = 1$ oder $m = 1 : \lambda$ zu setzen. Dieses giebt die Werthe der Exponenten $1; 1 + \delta : \lambda$ u. s. w. also $d = \delta : \lambda$, oder die umgekehrte Reihe $y = Ax^{1:\lambda} + Bx^{(1+\delta):\lambda} \ldots$

691. Zus. Wäre $\lambda = o$; so würde m unendlich. Also geht in diesem Falle die Umkehrung so nicht von statten, und $x = g + hy^{\delta} \ldots$ umzukehren, muß man $z = x - g$ setzen und die Reihe $z = hy^{\delta} \ldots$ umkehren, oder y durch $z = x - g$ suchen; wo $\lambda = \delta$; und $d = 1$.

692. Aufg. Eine unendliche Reihe, die nach z geordnet ist, ist einer unendlichen Reihe, die nach y geordnet ist; gleich; Man soll y durch z ausdrücken. Es sey $\delta) az^{\varepsilon} + bz^{\varepsilon+\varkappa} \ldots = \natural)$

$= \frac{\delta}{+}) gy^{\lambda} + hy^{\lambda + \delta} \ldots$

Man setze x der Reihe $\frac{\delta}{+}$ gleich; und drücke y durch x nach 690 aus; Weil nun auch die Reihe $\sigma = x$; so setze man in den Ausdruck, der y durch x giebt, überall die Reihe σ statt x; so bekömmt man y durch z.

693. Anm. So kommen sehr zusammengesetzte Ausdrückungen heraus; welches in dieser Allgemeinheit nicht anders seyn kann. Drey besondere Fälle, nähmlich 690 für $\lambda = 1$; $\delta = 1$ und $\delta = 2$; und 692 für $e = \varkappa = \lambda = \delta = 1$; findet man in Hausens Elem. Mathes. Calcul. Extens. p. 173. sequ. wo auch das sehr zusammengesetzte Gesetz der Coefficienten angegeben, aber nicht allgemein erwiesen wird. Meine Absicht ist hier nur zu zeigen, wie die Gestalt der umgekehrten Reihe vermittelst des Newtonischen Parallelogramms gefunden wird. Davon ist beym Hausen und bey denen, die das Parallelogramm hiezu nicht gebrauchen, nichts zulängliches gelehret worden, und wenn sie die Gestalt der umgekehrten Reihe nach Gefallen annehmen, so kann sie nichts rechtfertigen, als der Erfolg. (629) Wenigstens sind sie nicht versichert, ob sich nicht auser der Reihe, die sie annehmen, noch andere annehmen liessen.

Eine andere Art die folgenden Glieder der unendlichen Reihe zu finden.

694. I. Wenn man A und m aus dem Parallelogramm hat, (665.) so setze man in die Gleichung

$A x^{m} + p$ statt y; Vermöge des binomischen Lehrsatzes,

saßes, wird sich in der veränderten Gleichung die man solchergestalt erhält, auch p von der ersten Abmessung befinden. Man schreibe linker Hand in einer Columne lothrecht untereinander alle Theile der Gleichung, welche p enthalten, von demjenigen angefangen, in welchem sich p von der ersten Abmessung befindet, und wenn dergleichen mehr vorhanden sind, schreibe man denjenigen zu oberst, in welchem x die niedrigste Abmessung hat; so fahre man nach der Ordnung für die übrigen fort. Coefficienten heissen hier die beständigen Grössen, oder auch die durch x gegebenen Grössen, die in eine Potenz von p multiplicirt sind.

II. Das erste Glied von p zu bekommen, seze man den obern Theil der lothrechten Reihe dem linken der Horizontalreihe gleich, die Division wird das erste Glied der Reihe für p geben.

III. Diesen Werth des ersten Gliedes seze man statt p in die übrigen Theile der lothrechten Reihe, so bekömmt man die ersten Glieder der Reihen, die aus ihnen entstehen.

IIII. Unter diesen ersten Gliedern rechne man diejenigen zusammen, in denen x einen Exponenten, und zwar den niedrigsten hat, die also die niedrigsten sind.

V. Die Summe addire man mit entgegengesezten Zeichen zu dem Gliede der obersten Horizontalreihe, das eben den Exponenten hat.

VI.

VI. Befände sich kein solches Glied in der obern Horizontalreihe, so schreibe man die erwähnte Summe selbst an desselben Stelle.

VII. Was die Addition V oder das Verfahren VI giebt, ist das zweyte Glied der obersten Horizontalreihe, die aus dem obersten Theile der lothrechten entstehen soll, und giebt, mit dem Coefficienten dieses obersten Theiles dividirt, das zweyte Glied der Reihe für p.

VIII. Vermöge dieses zweyten Gliedes mit dem ersten (II) finde man die zweyten Glieder der Reihen (III) und soviel von dieser Reihen folgenden Gliedern, als sich dadurch finden lassen.

VIIII. Unter diesen zweyten Gliedern, rechne man wieder die niedrigsten (IIII) zusammen, und verfahre nach V oder VI; so giebt sich wie in VII; der Reihe p drittes Glied.

X. Aus diesem mit den ersten beyden verbunden finde man wieder folgende Glieder der Reihen III; verfahre damit nach VIIII; und finde so das folgende der Reihe p; nach VIIII.

XI. Es erhellt, daß man dieses Verfahren immer so weiter fortsetzen kann.

XII. Will man p bis auf eine gewisse Potenz von x und nicht weiter suchen, so hat man auch

nicht

nicht nöthig die Glieder der Reihen III welche diese Potenz übersteigen, zu berechnen.

Exempel. In der Gleichung $y^3 = a^3 + x^3$; den Werth von y zu finden, oder aus dem, was rechter Hand steht, die Cubikwurzel auszuziehen; setze man $y = a + p$ dieses gibt $3aap + 3app + ppp = xxx$ oder

$$3aap = x^3 - \frac{x^6}{3a^3} + \frac{5x^9}{27a^6} - \frac{10x^{12}}{81a^6} \cdot \cdot$$

$$3app = + \frac{x^6}{3a^3} - \frac{2x^9}{9a^6} + \frac{13x^{12}}{81a^9} \cdots$$

$$p^3 = + \frac{x^9}{27a^6} - \frac{x^{12}}{27a^9} \cdots$$

$$p = \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} \cdots$$

Hier ist in I; $A = \frac{1}{3aa}$; $m = 3$; welches man leicht, auch ohne das Parallelogramm sieht. Nun findet sich nach II; $\frac{p = x^3}{3aa}$ . . . . das Quadrat dieses Gliedes von p, mit 3a multiplicirt, und der Würfel dieses Gliedes, geben nach III die ersten Glieder der Reihen 3app und p^3. Unter diesen ersten Gliedern ist das erste von 3app am niedrigsten; und gibt nach VI der obersten Horizontalreihe

zweytes Glied; aus dem man nach VII; das zweyte Glied von $P = * - \frac{x^6}{9a^3}$ findet; die beyden gefundenen Glieder von p, geben für die folgenden Glieder der Reihen III, die ersten weggelassen.

$$3app = * - \frac{2x^9}{9a^6} + \frac{x^{12}}{27a^9}$$

$$p^3 = * - \frac{x^{12}}{27a^9}$$

Zwar könnte man noch mehr Glieder des Würfels von p finden, ich lasse aber solche weg, weil ich p nicht weiter als bis auf die 12 Potenz von x suchen will. (XII) Nun rechnet man das erste Glied von p^3 und das zweyte von 3app zusammen. Ihre Summe mit entgegengesetzten Zeichen, giebt das dritte von 3aap und von p (VIIII) woraus sich verschiedene der andern Reihen finden liessen: Aber wegen XII. berechnet man keines als $\frac{+ 10x^{12}}{81a^9}$ in 3app; daß also der Reihe 3app drittes Glied völlig $\frac{13x^{12}}{81a^9}$ heißt, und folglich mit dem zweyten von p^3 zusammengerechnet, das vierte von p (XI) giebt. Wollte man mehr Glieder suchen, so müßte man die folgenden Glieder der Reihen 3app; p^3 berechnet haben.

Zweytes Exempel. Die Quadratwurzel aus $\frac{1 + uu}{1 - uu}$ zu finden; setze man diesen Bruch $= yy$ oder $1 + uu = yy - uuyy$; ferner $y = 1 + p$; also $uu = 2p + pp - uu - 2uup - uupp$; folglich

$2p$	$= 2uu +$	$1. u^4 +$	$1. u^6 +$	$\frac{3}{4}. u^8$
$- 2uup =$		$- 2 -$	$1 -$	1
$+ pp =$		$+ 1 +$	1	$+ \frac{1}{4}$
				$+ 1$
$- uupp =$			$- 1$	$- 1$
$p =$	$uu +$	$\frac{1}{2} u^4 +$	$\frac{1}{2} u^6$	$+ \frac{3}{8} u^8$

Hier findet man $p = uu \ldots$ aus $2p = 2uu$; das gefundene Glied von p giebt die ersten Glieder der übrigen Reihen; (Es versteht sich, daß die Potenz von u die oben an jeder Columne steht, in jedes Glied dieser Columne multiplicirt ist); unter diesen ersten Gliedern gehören die niedrigsten zu $- 2uup$ und zu pp und geben also das zweyte von $2p$ und von p; u. s. w.

Drittes Exempel. Die Gleichung $y^3 + y + xy - x^3 \cdot 2 = 0$ verwandelt sich, wenn man $1 + p = y$ setzt, in folgende, $4p + xp + x + 3pp + p^3 - x^3 = 0$.

$$4p = -x * + 1.x^2$$

$$+\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{128}$$

$$xp = -\frac{1}{4} + \frac{1}{64}$$

$$3pp = +\frac{3}{16} - \frac{3}{128}$$

$$p^3 = -\frac{1}{64}$$

$$p = -\frac{1}{4}x + \frac{x^2}{64} + \frac{131}{512}x^3 \ldots$$

Hier machen in den Reihen xp; $3pp$; p^3; die Glieder, welche den Würfel von x enthalten, zusammen $-3x^3 : 128$; dieses wird mit dem entgegengesetzten Zeichen in die obere Horizontalreihe gesetzt; und da sich in derselben schon $+x^3$ wegen der Gleichung befindet, so ist nach V; dieser obern Reihe drittes Glied $\frac{131}{128}x^3$; woraus sich das dritte von p findet.

Der Beweis des Verfahrens kömmt darauf an: Vermöge der gegebenen Vorschriften findet man den Werth von p so, daß die Theile der Gleichung, welche p enthalten, zusammengenommen, den auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebrachten Theilen der Gleichung, die kein p enthalten, gleich sind; welches eben das ist, was die Gleichung erfodert. Dieses läßt sich durch Zeichen allgemein so erläutern. Der oberste Theil der lothrechten Reihe (1) heisse αp; die Summe aller übrigen Theile dieser lothrechten Reihe zusammen heisse P; und ein unbestimmter Theil der Gleichung, welcher kein p enthält, heisse δx^n; Nun wird aus jedem Theile derer

derer, welche zusammen P ausmachen, eine Reihe, die Summe der Glieder aller dieser Reihen, in denen x^n ist, heisse $+\zeta x^n$ so steht die Rechnung nach den gegebenen Vorschriften so; die Punete bedeuten, daß Glieder vorhergehen und folgen.

$$\begin{array}{rcl} \alpha p = & \ldots\ldots & \delta . x^n \ldots\ldots \\ & & -\zeta \quad \ldots\ldots \\ P = & & +\zeta \quad \ldots\ldots \\ \hline & & \delta - \zeta \end{array}$$

$$P = \ldots\ldots \frac{\delta - \zeta}{\alpha} . x^n \ldots$$

Hier ist klar, daß das Glied von p aus der Voraussetzung bestimmt wird, daß $\alpha p + P = \ldots + \delta x^n$ oder daß dasjenige, was in den Reihen αp und P die Potenz n von x enthält, zusammen nicht mehr als δx^n beträgt; deßwegen nimmt man $\alpha p = \ldots (\delta - \zeta) . x^n$ an, wenn $P = \ldots + \zeta x^n$ ist. Da also δx^n nach der Ordnung jeden Theil der Gleichung bedeuten kann, der kein p enthält, so heißt dieses soviel, als: p wird dergestalt bestimmt, daß alle die Glieder, die p enthalten, zusammen soviel betragen als alle die Glieder auf der andern Seite, die p nicht enthalten; Wenn daher $\delta = o$ ist, oder wenn aus der Gleichuug kein Glied, das kein p enthielte, und den Exponenten n hatte, auf die andere Seite des Gleichheitszeichens kam, so wird $\alpha p = \ldots - \zeta x^n$ angenommen, damit die Glieder in αp und P die den Exponenten n haben, zusammen o ausmachen.

Im dritten Exempel ist $n = 3$; $\delta = 1$; $\alpha = 4$; $P = (x + 3p + pp) . p$; $\zeta = -\frac{3}{128}$

695. Zus. Wenn das erste Glied von p das man solchergestalt fände, kein x enthielte, sondern eine beständige Grösse wäre; so würden die ersten Glieder aller der Reihen auch so beschaffen seyn, die aus den Theilen der linken Columne (695. I.) entstehen, welche nur Potenzen von p, ohne daß x darein multiplicirt wäre, enthalten. In diesem Falle also, wenn die Gleichung zwischen x und p ein vollkommen beständiges Glied hat, findet dieses Verfahren nicht statt, es wäre denn, daß die untern Theile der linken Columne, (die zusammen P im nur vorgetragenen Beweise ausmachen) alle so beschaffen wären, daß jeder p mit x multiplicirt enthielte.

Ex. $p + px = 1$ giebt

$p = 1 - 1.x + 1.xx - 1x^3 \ldots$

$px = +1 \quad -1 \quad +1$

696. Zus. Giebt eine Gleichung ins Parallelogramm gesetzt, (687) zwey äuserste Fächer, deren eines x das andere y enthält, d. i. befindet sich kein ganz unveränderliches Glied in ihr, so kann man dieses Verfahren (694) gleich mit x und y anbringen, ohne p zu suchen.

Ex. So giebt $y^3 + yy + y - x^3 - o$ folgendes:

$y =$

$$y = x^3 - 1.x^6 + 1.x^9 * - 4.x^{15}$$
$$yy = +2 - 2 + 3.x^{12} - 2...$$
$$y^3 = +1 - 3 + 6$$

697. Zus. Auf eben die Art liesse sich eine absteigende Reihe erhalten. Man ordne das nur gebrauchte Exempel so:

$$y^3 = x^3 - 1.x^2 - \tfrac{1}{3}.x + \tfrac{2}{3} + \tfrac{7}{81}.\tfrac{1}{x}$$
$$y^2 = +1 - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{11}{81}..$$
$$y = +1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9}$$

Nähmlich $y^3 = x^3$... giebt $y = x$ und $yy = xx$; und also das zweyte Glied von $y^3 = * - xx$ Aus den ersten beyden Gliedern des Würfels von y ziehe man die Cubikwurzel, so kömmt das zweyte Glied von $y = * - \frac{1}{3}$; also das zweyte von $yy = * - \frac{2}{3}x$ welches, zum ersten Gliede der Reihe y addirt, $+\frac{1}{3}x$ giebt, und mit entgegengesetztem Zeichen in die obere Horizontalreihe gebracht wird. Die Wurzel aus den drey ersten Gliedern des Würfels gezogen giebt das dritte Glied von $y = ** - \frac{2}{9x}$ u. s. w. die folgenden Glieder von y sind $\frac{+7}{81xx} + \frac{5}{81x^3}$ u. s. w.

Aber dieses Verfahren ist wegen der Ausziehung der Wurzeln zu mühsam.

698. Anm. In Colsons Comment. über Newtons Method of Fluxions, Sect. II. und V. findet man dieses Verfahren weitläuftig erläutert.

Auflösung der cubischen bestimmten Gleichungen durch die sogenannte cardanische Regel.

699. Aufg. Einen irrationalen Ausdruck für die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 = ax + b$ zu finden. Jede cubische Gleichung läßt sich auf diese Gestalt bringen. (282)

Aufl. Man setze $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; und nehme ferner an, A und B sollen die beyden Wurzeln nachstehender quadratischen Gleichung $z^2 = \alpha z - \beta$ seyn. Um α und β durch die gegebenen Coefficienten a; b; zu bestimmen; überlege ich, daß $A + B = \alpha$; $A.B = \beta$ (224) und

$$x^3 = A + 3\sqrt[3]{AA.B} + 3\sqrt[3]{A.B.B} + B$$
$$= A + B + 3\sqrt[3]{A.B.}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})$$
$$= 3x\sqrt[3]{A.B} + A + B$$

Hieraus folgt $a = 3\sqrt[3]{A.B} = 3\sqrt[3]{\beta}$; $b =$

$A + B = \alpha$ folglich $zz = bz - \frac{a^3}{27}$; daher

$z = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3)}$ Der Irrationaltheil mag c heissen; so ist $A = \frac{1}{2}b + c$, $B = \frac{1}{2}b - c$; und $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + c)} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b - c)}$ dafür ich $m + n$ schreiben will.

700. Zus. Die cubische Gleichung mit $x - m \cdot n$ dividirt, (226) gibt zum letzten Reste $- b - a.(m + n) + (m + n)^3$. aber vorhin fand man schon

(m+n)

$(m+n)^3 = A+B+3\sqrt[3]{AB}.(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}) = b+a.(m+n)$
dazu addirt $-b-a(m+n)$

geht auf; der Quotient ist $x^2+(m+n)x+(m+n)^2-a$ hier ist $3mn=a$; also $(m+n)^2-a = mm+nn-3mn$; Nun sind die Wurzeln $\frac{m+n \pm \sqrt{((m+n)^2-4.(mm+nn+3mn))}}{2}$

also werden diese Wurzeln $\frac{x\,m = +n \pm (m-n)\sqrt{-3}}{2}$

701. Zus. Wenn c möglich ist, also auch m und n möglich sind, so sind zwo Wurzeln der cubischen Gleichung (699) unmöglich.

702. Lehns. Es sey K eine mögliche Grösse; λ eine unmögliche; deren Quadrat möglich ist, z. E. $\lambda = L.\sqrt{-1}$ wo L möglich ist; ferner sollen P; Q; auch mögliche Grössen bedeuten; es mögen nun K; L; P; Q; rational oder irrational seyn; so ist I) $\sqrt[3]{(K+\lambda)} = P+Q\sqrt{-1}$; II) $\sqrt[3]{(K-\lambda)} = P-Q\sqrt{-1}$.

Bew. Daß die Cubikwurzel aus der Summe einer möglichen und einer unmöglichen Grösse unmöglich ist, fällt in die Augen: Sie muß aber auch einen möglichen Theil haben, denn eine unmögliche Grösse allein, kann in ihrem Würfel nicht den möglichen Theil K geben. Man mache in I auf beyden

Seiten die Würfel; und setze das Mögliche dem Möglichen, das Unmögliche dem Unmöglichen gleich, (ohngefähr nach der Art zu schliessen wie in 235; 233;) so ist $K = P^3 - 3PQQ$ und $\lambda = (3PP.Q - Q^3).\sqrt{-1}$ oder $L = 3PPQ - Q^3$ folglich $K - \lambda = P^3 - 3PPQ\sqrt{-1} - 3PQQ + Q^3\sqrt{-1} = (P - Q\sqrt{-1})^3$; Also erhellt, daß die Gleichungen I; II; zusammen richtig sind, oder, daß die zweyte aus der ersten folget: Nur muß man noch darthun, daß P; Q; mögliche Grössen sind. Dieses zeigt sich folgendergestalt:

$(K + \lambda).(K - \lambda) = KK - \lambda\lambda = KK + LL$ ist gewiß eine mögliche Grösse; also ist es auch ihre Cubikwurzel. Diese Cubikwurzel heisse e; Nun ist aus dem bisher geführten Beweise $(K + \lambda).(K - \lambda) = ((P + Q\sqrt{-1}).(P - Q\sqrt{-1}))^3 = (PP + QQ)^3$ also $e = PP + QQ$; oder $QQ = e - PP$; dieses in die Gleichung $K = P^3 - 3PQQ$ gesetzt, giebt ⊙) $P^3 - \frac{3e}{4}P = \frac{1}{4}K$; Eben so setze man $PP = e - QQ$ in $L = 3PPQ - Q^3$ dieses giebt $Q^3 - \frac{3e}{4}Q = -\frac{1}{4}L$; wo P und Q, jedes gewiß einen möglichen Werth haben. (272) Zum Beweise ist nähmlich genug, daß es für jede dieser Grössen einen möglichen Werth giebt. Haben sie noch unmögliche, so schadet dieses nicht. Der Satz ist in eben dem Verstande wahr, in welchem man behauptet, daß die Cubikwurzel aus einer möglichen Grösse möglich ist, obgleich diese Cubik-

wurzel

wurzel allemahl noch zweene unmögliche Werthe hat. (249)

730. Zus. Eben die nur angeführte Betrachtung zeigt, was die beyden übrigen Werthe von P in Θ sind. Es ist nähmlich aus 240 auch $\sqrt[3]{(K.+\lambda)} = (P + Q\sqrt{-1}).(-1 \pm \sqrt{.3}) : 2 = -\frac{1}{2} P \mp \frac{1}{2} Q\sqrt{3} \pm \frac{1}{2} P\sqrt{-3} - \frac{1}{2} Q\sqrt{-1}$ Nun bedeutet die Wurzel in Θ den möglichen Theil der Cubikwurzel von $K + \lambda$; Also bedeutet sie auch $-\frac{1}{2} P \mp \frac{1}{2} Q\sqrt{3}$;

Ex. Wenn $K = 81$; $\lambda = 30\sqrt{-3}$; so ist $n = 21$; und $P^3 - \frac{63}{4} P = \frac{81}{4}$; Hier ist $P = -3$; $Q = 2\sqrt{3}$ oder $(-3 + 2\sqrt{-3})^3 = 81 + 30\sqrt{-3}$ wie man sich leicht durch die Probe versichern kann, wenn mau auch nicht weiß, wie diese P und Q gefunden worden sind. Also sind die Wurzeln der Gleichung Θ; -3; $-\frac{3}{2}$; $+\frac{9}{2}$. Es erhellt, daß eben aus der Ursache Q durch eine cubische Gleichung bestimmt wird.

704. Anm. Will man die Verkürzung der Rechnung durch den Gebrauch der Grösse e nicht beobachtet, die Clairaut lehret, Alg. 256. der deutschen Uebers. so kann man aus den beyden Gleichungen, die im Anfange des Beweises stehen, $K = \ldots$ und $L = \ldots$; Q wegschaffen (199) alsdenn aber findet man für P eine Gleichung des 9 Grades, die sich auf eine cubische bringen läßt. Dieses ist Landen begegnet, Mathematical Lucubrations pag. 54.

705. Lehrs. Wenn c 699 unmöglich ist; also auch m und n unmöglich sind (702) so sind der cubischen Gleichung 699 drey Wurzeln möglich.

Bew. Alsdenn ist $m = P + Q\sqrt{-1}$; $n = P - Q\sqrt{-1}$ (702) folglich $m + n = 2P$; $m \cdot n = 2Q\sqrt{-1}$ welches nach 700 mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt, $-2Q.3$ giebt, also sind die drey Wurzeln; $2P$; (699) und $P \pm 3Q$ (700.)

706. Zus. Weil c möglich oder unmöglich ist, nachdem $\frac{1}{4} - bb\frac{1}{27}a^3$ bejaht oder verneint ist; so hat die cubische Gleichung (699) lauter mögliche, oder zwo unmögliche Wurzeln, nachdem $\frac{1}{4}$ bb $-$ $\frac{1}{27}$ aaa verneint oder bejaht ist.

707. Zus. Wenn die cubische Gleichung zwo unmögliche Wurzeln hat, so giebt das Verfahren 699; $m + n$ für einen möglichen Werth der übrigen möglichen Wurzel.

708. Zus. Sind aber der cubischen Gleichung Wurzeln alle drey möglich, so werden m und n unmöglich, daß sich also das nur erwähnte Verfahren, wie es scheinet, bey drey möglichen Wurzeln nicht anbringen läßt. Diese scheinbare Schwürigkeit soll sogleich gehoben werden.

709. Lehrs. Wenn die cubische Gleichung drey mögliche Wurzeln hat, so giebt das Verfahren 699 solche alle drey.

Bew.

Bew. Alsdenn ist $\sqrt[3]{A} = P + Q\sqrt{-1}$ und auch $= (P + Q\sqrt{-1}) \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; Ingleichen $\sqrt[3]{B} = P - Q\sqrt{-1}$ und auch $= (P - Q\sqrt{1}) \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ (240) Nun soll $3\sqrt[3]{AB} = a$ möglich seyn; (699) Man muß also solche Ausdrückungen der Cubikwurzeln zusammen nehmen, um x auszumachen, deren Product möglich ist. Folglich sind die drey Werthe von x;

1) $P + Q\sqrt{-1} + P - Q\sqrt{-1} = 2P$

2) $(P + Q\sqrt{-1}) \cdot \frac{(-1 \pm \sqrt{-3})}{2} + (P - Q\sqrt{-1}) \cdot \frac{(-1 \mp \sqrt{-3})}{2} = -P \mp Q\sqrt{3}$. Wenn man

nähmlich für den zweyten Werth von x; die obern Zeichen vor der unmöglichen Wurzel, für den dritten die untern gebraucht, denn so erhält man $\sqrt[3]{AB} = (PP + QQ \cdot \left(\frac{-1 - (-3)}{2}\right)$ möglich. Gegentheils würde dieses Product und seine Cubikwurzel unmöglich werden, wenn man $(P + Q\sqrt{-1}) \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right) + (P - Q\sqrt{-1}) \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)$ annehmen wollte.

710. Lehrs. Wenn die cubische Gleichung zwo unmögliche Wurzeln hat, so gibt das Verfahren 699; solche auch mit, nebst der möglichen (707).

Bew. Es hat alsdenn x nebst dem Werthe m: + n der aus zween möglichen Theilen besteht, nach 240 auch folgende beyde:

$$\left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\} m.\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)+n.\left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right)$$

woraus $\frac{-(m+n)\pm(m-n)\sqrt{-3}}{2}$

wird; da der unmögliche Theil, weil m; n; nicht einerley sind, sich nicht aufhebt.

711. Zus. Wenn man aus den drey Werthen von x (709) die Wurzelgleichungen (220) macht, und multiplicirt so kömmt $x^3 - 3(PP+QQ)x - 2(P^3 - 3PQQ) = o$ Aber $PP+QQ = \sqrt[3]{AB}$ (702) $= \frac{1}{3}a$ (699) und $P^3 - 3PQQ = K$ (702) $= \frac{1}{2}b$ (699) also verwandelt sich die Gleichung in $x^3 - ax - b = o$ welches die 699 ist.

712. Zus. Eben die nur gefundene Gleichung läßt sich auch so ausdrucken $x^3 - 3ex - 2K = o$; Von diesen Wurzeln sind die Wurzeln der Gleichung ⊙ (702) die Hälften (280)

713. Zus. Auch in 710 läßt sich die Gleichung 699 aus den Wurzelgleichungen machen. Diese Erin-

Erinnerung findet man in der Maria Gaetana Agnesi, Instituzioni analitiche ad uso della gioventu Italiana T. I. §. 187.

714. Zus. Wenn in 710; m = n also in 699; c = o so sind die beyden übrigen Werthe von x; jeder = — m; und die Gleichung hat also zwo gleiche Wurzeln jede = — m; nebst der dritten = 2m;

715. Anm. Für diesen Fall ist $\frac{1}{4}$ bb = $\frac{1}{27}$ a^3 (699) folglich $\frac{1}{2}$ b = $(\frac{a}{3})_3 : 2$ also die Gleichung $x^3 = ax + \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{1}{3}a}$; und ihre Wurzel $2m = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}b} = 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$. Man kann sich gar leicht dergleichen Exempel in Rationalzahlen machen, wenn man für a das Dreyfache eines Quadrates annimmt.

716. Zus. Wenn die Wurzel einer cubischen Gleichung durch $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + c)} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b - c)}$ ausgedruckt wird, so ist c möglich oder unmöglich, nachdem zwo Wurzeln unmöglich, oder alle drey möglich sind. (701; 705;) und nun entdeckt sich die wahre Ursache, weßwegen es im letztern Falle unmöglich wird; Der angenommene Ausdruck der Wurzel nähmlich, bedeutet alle drey Wurzeln, vermöge des Verfahrens 709; 710; Er kann aber nicht drey mögliche bedeuten, wofern nicht c unmöglich ist, (709) denn wenn c möglich ist, giebt er nach 710 zwo unmögliche Wurzeln.

717. Anm. Das 699 angewiesene Verfahren, heißt man Cardans Regel. Cardan hat sie in seiner Algebra vorgetragen, die den Titel führt: Artis magnae siue de regulis algebraicis liber vnus, und mit seinem opere nouo de proportionibus numerorum; motuum &c. zu Basel 1570 fol. herausgekommen ist. In dieser Schrift 1. C. 5. Seite schreibt er die Erfindung der Regel dem Scipio Ferreus von Bononien zu. Sie heißt nach seinem Ausdrucke: capitulum cubi, & rerum, numero aequalium; d. i. nach unserer Art zu reden $x^3 + gx = h$ nähmlich die alten Algebraisten heissen rem, was wir x nennen. Nicolaus Tartalea hat diese Regel ebenfalls herausgebracht, und dem Cardan mitgetheilet, doch ohne Beweis, den Cardan gefunden hat und beybringt. Cardans Regel in Buchstaben ausgedruckt, sieht etwas anders aus als die gegebene (699) es läßt sich aber eine leicht auf die andere bringen. Carteſius hat die Formel, die aus Cardans Regel fließt, in seine Geometrie gebracht. (III. Buch 92 Seite der Amsterd. Ausg. 1683; oder der Franckfurter 1695) und Francisc. a Schouten in der Schrift de cubicarum aquat. resolutione (*) wiederholt, und Huddens Analysis dazu beygefügt: Wenn aber alle Wurzeln möglich sind, glaubt er, sie habe nicht statt, und lehret diesen Fall durch die Theilung des Winkels in drey Theile auflösen. Man kann die Regel auf verschiedene Arten finden; ich habe (699) Herrn Eulern in f. coniectatione de formis radicum aequationum Comm. Ac. Petrop. T. VI. p. 216. §. 3; 4; gefolgt.

718

(*) Im Anhange zu seinen Commentar. in Geom. Cartes. in angef. Aufl. 345. S. auch bey der Schrift de organica sect. con. descriptione Lugd. Bat. 1646.

718. Anm. Die scheinbare Ungereimtheit (708) hat den Mathematikverständigen viel Kopfbrechens verursacht. Newton; Ar. vniu. de Aequat reductione per diuisores surdos 209 S. von Gravesands Ausg. sagt: „Wenn es drey mögliche Wurzeln gäbe, so „verhielten sie sich alle gleichgültig zu den Coefficienten der Gleichung, und würden ohne einigen Unterschied durch x ausgedruckt, daher finde man keine, „weil es nicht möglich sey, sie alle drey nach diesem „Gesetze auszudrücken.„ Man sieht leicht, daß dieses Nichts gesagt ist: denn überhaupt entsteht eben die Mannichfaltigkeit der Wurzeln daher, daß verschiedene unbekannte Grössen gegen die gegebenen, durch welche die Coefficienten bestimmt werden, einerley Verhalten haben, es mögen nun diese unbekannten Grössen alle möglich, oder einige unter ihnen unmöglich seyn; wie die Exempel 242 zeigen. Indessen hat diese Stelle Newtons, Fridr. Wilh. Stübnern veranlaßt, hier eine Anwendung des Satzes des zureichenden Grundes zu finden; weil kein Grund vorhanden wäre, warum sich mehr eine der drey Wurzelm als die andere zeigen sollte. (in seiner 1733. zu Leipzig gehaltenen Disputation contra virium mensuram cartesianam pro leibnitiana §. 134;) Herr Clairaut (in s. Algebra nach Mylius deutscher Uebers. V. Th. VI. und f. §. 302. S.) handelt diese Regel auch ab, und bemerkt, daß die beyden unmöglichen Cubikwurzeln doch wohl eine mögliche Summe geben könnten; weil sich die unmöglichen Grössen aufheben könnten. Darauf verwandelt er nach Nicoles Anleitung (Mem. de l'Ac. des sc. 1738. p. 99. 100;) jede unmögliche Cubikwurzel in eine unendliche Reihe, und zeigt, daß die unmöglichen Theile, die sich in jeder einzeln befinden, bey der Addition aufgehoben werden. Dieses ungemein mühsame Verfahren ist ganz überflüßig, wenn man die Sache nach 702; 709; betrachtet; für sich allein aber könnte es doch noch einigen Zweifel übrig lassen.

719. Anm. Den es folgt nicht, daß eine Grösse möglich ist, weil sie durch eine Reihe ausgedruckt wird, von der alle Glieder, die man findet, möglich sind. Für $\sqrt{(1-u)}$ läßt sich eine steigende Reihe finden. (625) Dieser Reihe Glieder, soviel man ihrer nur finden kann, sind alle möglich, was auch u für eine Grösse hat, es mag kleiner oder grösser als 1 seyn. Aber in dem letzten Falle ist das, was die Reihe ausdrückt, unmöglich, und doch drückt sie solches durch lauter mögliche Glieder aus. Es ist wahr, daß die Reihe sich alsdenn dem Werthe der Wurzel, die sie ausdrücken soll, nicht nähert, sondern von ihm entfernt, (12) aber dieses zeigt nicht an, daß sie etwas unmögliches ausdrücke. Denn die Reihe 13 z. E. drückt ein mögliches $\frac{1}{1+x}$ aus; es mag x kleiner oder grösser als 1 seyn, und doch entfernt sie sich in dem letzten Falle von dem wahren Werthe. Wenn nähmlich eine Reihe lauter mögliche Glieder enthält, und doch was Unmögliches bedeuten soll, so wird ihre Ergänzung (11) unmöglich seyn. Ob also gleich die Reihe welche nach des Nicole Verfahren die Summe zwoer Reihen mit unmöglichen Gliedern ist, lauter mögliche Glieder enthält, so müßte man doch noch untersuchen, wie es mit den Ergänzungen der Reihen aussähe, und ob dieselben wenn sie unmöglich wären sich auch aufhüben.

720. Anm. Uebrigens hat eine Erinnerung wie des Nicole seine, schon Leibniz 1696 gemacht, (s. seinen Brief an Wallisen Wallis. Op. T. III. coll. epist. 27.) daß sich nähmlich die unmöglichen Grössen in der Summe, wie er redet, virtualiter aufheben, daher Nicole sich mit Unrecht rühmet, solches zuerst gesehen zu haben. König; (Mem. de l'Ac. de Prusse 1749; p. 108) hat diese Erscheinung einer Uumöglichkeit, die er für etwas wirkliches hält, gar aus der

Logik

Logik wie Stübner aus der Metaphysik erklären wollen, daß also nur noch ein Philosoph fehlt, der die Moral hier zu Hülfe ruft. König zeigt nähmlich, die gemeine Analysis, durch welche man diese Regel findet, setze etwas zum voraus, das auf eine Unmöglichkeit führe wenn alle drey Wurzeln möglich sind: also hofft er, würde man durch eine Verbesserung der Analysis eine Formel, wo diese Ungereimtheit nicht statt fände, entdecken. Aber Harriot, Wallis (Algebr. 45; 46; Cap. Op. Vol. II.) Euler; Lauden (Mathem. Lucubr. P. VI.) haben, jeder durch eine eigne Analysis, eben die Formel herausgebracht, und aus 716 erhellt, daß sich keine andere herausbringen läßt.

721. Zus. In dem Falle (710) kann man m und n (699) durch Näherung finden.

Ex. $x^3 = 6x - 40$; Hier ist $a = 6$; $b = -40$; also $cc = 392$; und $x = \sqrt[3]{(-20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(-20 - \sqrt{392})}$ wo man anfangs die Quadratwurzel und nachgehends die Cubikwurzeln durch Näherung ausziehen, und also den beynahe wahren Werth von x finden könnte.

720. Zus. Wäre aber der eigentliche Werth von x rational; so würde man ihn durch dieses Verfahren nicht finden.

Im Exempel; ist $392 = 98 \cdot 4 = 14 \cdot 7 \cdot 4 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4$; also $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$; Nun aber ist $(-2 \pm \sqrt{2})^3 = -20 \pm 14\sqrt{2}$ wie man sich durch die Probe versichern kann, ohne daß ich hier zu zeigen nöthig hätte, wie es gefunden wird; Also kömmt $x = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = -4$

721. Zus. In 708 aber; wo sich die Näherung (719) nicht anbringen läßt, müßte man, wofern die Regel brauchbar seyn sollte, eine Methode haben, die Cubikwurzel aus $K \pm \lambda$ (702) auszuziehen, oder das dortige P und Q zu finden. Die 702. u. f. gebrauchte Methode dient nicht dazu, denn sie führt, P zu finden, auf eine Gleichung, die nichts einfacher ist als diejenige, deren Wurzeln man durch die Cardanische Formel finden soll. (712)

722. Zus. Man könnte auf eine ähnliche Art, wie in 702 verfahren worden, auch die Cubikwurzel aus einer zweytheilichten Grösse suchen, deren ein Stück rational, das andere irrational, aber möglich ist. Man müßte für diese Cubikwurzel einen Ausdruck annehmen, der aus einem rationalen und einem irrationalen Theile bestünde, auf beyden Seiten cubiren, und das Rationale unter sich, das Irrationale auch unter sich gleich setzen. Aber auch so würde man die beyden Theile des angenommenen Ausdrucks, die man suchte, durch eben so eine cubische Gleichung finden, wie die ist, zu deren Auflösung nach Cardans Regel man eine solche Rechnung anstellen wollte. So macht es Wolf El. Analys. §. 360; die Cubikwurzel aus $20 + \sqrt{392}$ zu finden; löset er die Gleichung $z^3 - 6z = 40$ auf; wo der Werth von z; wie er durch Versuche (nach 294) findet, 6 ist, und daraus findet er die gesuchte Cubikwurzel $2 + \sqrt{2}$; diese Cubikwurzel nun wollte er deßwegen wissen, weil Cardans Formel auf

sie

sie führt, wenn man dadurch die Gleichung $x^3 - 6x = 40$ auflösen will. Hätte er nicht unmittelbar den Werth von x in dieser Gleichung eben so leicht gefunden?

723. Anm. Die Analysten haben Methoden gesucht aus einer zweytheilichten Grösse, deren einer Theil rational, der andere irrational ist, Wurzeln von jedem Grade auszuziehen, so wie hier insbesondere Cubikwurzeln nöthig wären. Newton; Ar. vniu. de reductione radicalium ad simpliciores; cet. p. 50. hat Vorschriften dazu gegeben, aber ohne Beweis, damit sich verschiedene Mathematikverständigen beschäfftiget haben, als: Colin Mac Laurin; Algebr. P. I. §. 118. und f. H. Clairaut Alg. IIH. Th. XXV. u. f. Art. Dieses abzuhandeln erfodert aber soviel Weitläuftigkeit, daß es deßwegen von verschiedenen Schriftstellern, selbst von der Agnesi in ihrer ziemlich vollständigen Einleitung zur Algebra ist weggelassen worden. Auch werden dabey oft noch Versuche vorausgesetzt, wie denn Colin Mac Laurin Alg. P. I. 131. H. das, was hier 721 verlangt wird zu verrichten, sich begnügt einen Weg anzuweisen, der nicht ganz und gar auf Versuchen beruht. Ehe man sich auf eine solche Art bey dem Falle (708; 721) zu helfen gewust, hat man ihn casum irreducibilem genannt, wiewohl nach Leibnizens Berichte (epistol. ad Oldenburgium; in collect. epist. ap. Wallis. op. T. II.) Raphael Bombelli zuerst die Wurzeln aus diesen scheinbarlich unmöglichen Grössen zu finden gelehrt hat. Dieses wird mich rechtfertigen, wenn ich hier davon gar nichts beybringe. Cardans Regel, die nach dem Zeugnisse vieler Mathematikverständigen unter andern auch der Agnesi a. a. O. 180 H. von sehr wenigen Gebrauche ist, wäre selbst von mir weggelassen worden, wenn sie nicht wegen der vielen und seltsamen Bemühungen merkwürdig wäre, die sich die Algebraisten gegeben haben, eine Schwürigkeit

bey ihr zu heben, die nicht vorhanden ist. So wird ihre Theorie, wie ich sie hier vorgetragen habe, auch demjenigen nicht unangenehm seyn, der sich mit ihrer wirklichen Anwendung nicht beschäfftigen will, nachdem wir bequemere Arten haben, die rationalen und irrationalen Wurzeln zu finden. Landen a. a. O. hat noch die Bemühung übernommen, eine solche Regel für cubische Gleichungen zu finden, wo das zweyte Glied nicht fehlt, wovon ich wie in (513) urtheilen muß. Man hat auch ähnliche Regeln für die biquadratischen Gleichungen gesucht, und Herr Euler hat auf diese Formeln eine Muthmassung gegründet, wie die Wurzeln der Gleichungen überhaupt aussehen möchten. (s. 717.) Die vorhergehenden Betrachtungen habe ich meistens in einem 1757. hier herausgegebenen Programma Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere cet. vorgetragen.

Allgemeine Formeln der Differenzen und Summen.

724. Aufg. Wenn eine Reihe nach einem gewissen Gesetze fortgehender Grössen als eine Hauptreihe (series primitiua) gegeben ist, eine allgemeine Formel zu finden; die jedes Glied jeder Reihe der Unterschiede durch die Glieder der Hauptreihe ausdrückt. Das Verfahren 309; 310; ist ein besonderer Fall hievon.

			I	K
		II	L — K	L
	III	M — 2L + K	M — L	M
IIII		N — 3M + 3L — K	N — 2M + L	N — M	N
O — 4N + 6M — 4L + K		O — 3N + 3M — L	O — 2N + M	O — N	O

Aufl. I) K; L; u. s. w. sind nach einander folgende Glieder der Hauptreihe, unter I; II; u. s. w. stehen die Reihen der ersten, zweyten, u. s. Unterschiede. Es fällt in die Augen, daß die Coefficienten der Reihen der Differenzen, oder die Zahlen, welche daselbst in die Glieder der Hauptreihe multiplicirt sind, so weit man sie hier berechnet hat, mit den Binomialcoefficienten einerley sind. Bey der ersten Reihe der Unterschiede sind die Coefficienten 1; 1; bey der zweyten, dritten, vierten, aber, die von der zweyten, dritten, vierten Potenz. Dieses entdeckt das Gesetz, nachdem jedes Glied jeder Reihe der Unterschiede gemacht wird, und man hat sich nur noch von der Allgemeinheit dieses Gesetzes zu versichern.

II) Dieses bequemer zu bewerkstelligen, so heisse jedes Glied der Hauptreihe y, aber mit einer beygeschriebenen Zahl; so daß dieser Buchstabe allein, ein gewisses unbestimmtes Glied der Hauptreihe anzeigt, das ich als das erste ansehen will; y_1 sein nächstfolgendes oder das zweyte; y_2 das auf dieses folgt, oder das dritte; u. s. w. y_n das $n+1$te; diese Zahlen 1; 2; ... n bedeuten also die Stellen der Glieder, und sind nicht als Factoren, die in y multiplicirt wären, anzusehen.

III) Ferner bedeute $\triangle_1$ die erste Reihe der Differenzen, und $1\triangle_1$ ihr erstes $2\triangle_1$ ihr zweytes Glied u. s. w. So ist $1\triangle_1 = y_1 - y$; und weil das zweyte Glied der ersten Reihe der Unterschiede eben so

durch

durch der Reihe y. drittes und zweytes Glied bestimmt wird, wie das erste Glied der Reihe der Differenzen, durch der Reihe y zweytes und erstes Glied; so ist $2 \triangle 1 = y2 - y1$; also den Unterschied zwischen diesen beyden Gliedern der ersten Reihe der Unterschiede genommen; das erste Glied der zweyten Reihe der Unterschiede oder $1 \triangle 2 = y2 - 2.y1 + y$. (Hier ist zu merken, daß ein Punct zwischen y und einer Zifer die Multiplication anzeigt; z. E. 2. y1 bedeutet zweymahl das Glied y1) Nun ist klar, daß das zweyte Glied der zweyten Reihe der Unterschiede, auf eben die Art wie das erste ausgedrückt wird, nur daß man in dem Ausdrucke des ersten Gliedes, statt jedes Gliedes der Hauptreihe, das nächstfolgende setzt: Solchergestalt wird $2 \triangle 2 = y3 - 2.y2 + y1$ und hievon $2 \triangle 1$ abgezogen läßt $1 \triangle 3 = y3 - 3.y2 + 3.y1 - y$ daraus wird $2 \triangle 3 = y4 - 3.y3 + 3.y2 - y1$ und folglich $1 \triangle 4 = y4 - 4.y3 + 6.y2 - 4.y1 + y$.

IIII) Das Gesetz also, welches die berechneten Glieder angeben, läßt sich allgemein so ausdrücken:

$$1 \triangle n = yn. - n.yn-1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.yn-2 \ldots$$

$$2 \triangle n = yn+1 - n.yn + \frac{n.(n-1)}{1.2}.yn-1 \ldots;$$

Hieraus folgt

$$1\Delta n+1 = yn+1 - (n+1).yn + \frac{(n+1).n}{1.2} yn-1 \ldots$$

V) Den Beweis allgemein zu machen, betrachte man die Sache folgendergestalt. Die Theile des ersten Gliedes von der nten Reihe der Unterschiede, oder die Theile von $1\Delta n$ sind: ein erster und die folgenden (wie 121) nach dem Gesetze nun das ich für Δn in IIII annehme, sind der r te und der $r+1$ te Theil der folgenden;

$$\mp \frac{n.(n-1)\ldots.(n-r+1)}{1.2.\ldots.r}.\ y(u-r) \pm \frac{P.(n-r)}{r+1}.$$

$(n-r-1)$ (134. 135.) P bedeutet nähmlich den Coefficienten bey $y(n-r)$ ohne sein Zeichen betrachtet. Da nun $2\Delta n$ aus $1\Delta n$ entsteht, wenn man in des letztgenannten Ausdrucke überall das folgende Glied der Hauptreihe statt des vorhergehenden schreibt, so ist der $r+1$ te Theil von $2\Delta n$

$$\mp \frac{P.(n-r)}{r+1}.\ y\,(n-r).$$

VI. Zieht man also von diesem Theile den rten der folgenden in $1\Delta n$ ab, weil solcher eben das Glied der Hauptreihe enthält, so bekömmt man

$$\mp P.\left(1+\frac{n-1}{r+1}\right).\ y.(n-r)$$ aber $1+\frac{n-r}{r+1} =$

$\frac{n+1}{r+1}$ also wird das, was man gefunden hat;

$$\mp \frac{(n+1).n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ r+1}.y\,(n-r)$$

be-

bejaht oder verneint, nachdem r ungerade oder gerade ist.

VII) Dieses gefundene aber ist der (r + 1) te Theil der folgenden, von 1 Δ (n + 1). Denn jeder Theil in 1 Δ (n + 1) ist das, was herauskömmt, wenn man von dem eben sovielten in 2 Δ n; denjenigen in 1 Δ n abzieht, der um eine Stelle weiter vorwärts liegt; dieses gründet sich darauf, daß die genannten beyden Theile in 2 Δ n und 1 Δ n einerley Glied der Hauptreihe enthalten, weil der 1; 2; 3; u. s. w. Theil von Δ 1; das n + 1 te; n te; n - 1 te u. s. w. Glied der Hauptreihe enthalten, oder weil die Glieder der Hauptreihe in den Theilen von 1 Δ rückwärts gehen; weil ferner 2 Δ n aus 1 Δ n wird, wenn man in 1 Δ n; statt jedes Gliedes der Hauptreihe, das sich in ihm befindet, das nächstfolgende setzt, und folglich jeder Theil von 2 Δ n das Glied der Hauptreihe enthält, das der eben sovielte Theil von 1 Δ n enthielte, der um eine Stelle weiter vorwärts lag. Auch ist ferner klar, daß der erste Theil von 1 Δ n (n + 1) einerley mit dem ersten Theile von 2 Δ n ist, weil der erste Theil von 2 Δ n aus der nur angeführten Ursache, keinen seines gleichen in 1 Δ n hat: der zweyte, dritte, vierte u. s. w. Theil von 1 Δ (n + 1) kommen heraus, wenn man von dem zweyten, dritten, vierten u. s. w. Theile in 2 Δ n, den ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Theil in 1 Δ n abzieht. Also hat man durch diesen Abzug in VI; überhaupt den (r + 1) ten folgenden Theil in 1 Δ (n + 1) gefunden.

VIII)

VIII) Setzt man aber n + 1 statt n in den Ausdruck des r + 1 ten folgenden Theiles in 1 △ n (V) wo man erstlich, ehe man dieses thut, statt P seinen Werth setzen muß; so kömmt eben das heraus, was man am Ende von VI gefunden hat. Folglich giebt der Abzug VI; eben den Ausdruck, für jeden unbestimmten Theil von 1 △ (n + 1) wie man bekömmt, wenn man n + 1 statt n; in eben den eben sovielten Theil von 1 △ n setzt. Ist also das IIII angenommene Gesetz für 1 △ n und daher auch für 2 △ n, richtig, so ist es auch für 1 △ (n + 1) richtig; denn wenn es für 1 △ n und für 2 △ n richtig ist, so folgt daraus durch den Abzug des ersten Gliedes vom zweyten, ein solcher Ausdruck für 1 △ (n + 1), den man ebenfalls erhält, wenn man n + 1 statt n in 1 △ n setzt, d. i. Wenn man das für 1 △ n angenommene Gesetz unmittelbar, ohne diesen Abzug vorzunehmen, auf 1 △ (n + 1) anwendet.

VIIII) Nun ist das angenommene Gesetz richtig, wenn n = 1; = 2; = 3; = 4; (IIII) also ist es für 4 + 1 = 5 richtig; und folglich für 5 + 1 = 6; u. s. w. ohne Ende nach der schon gebrauchten Art zu schliessen. (139; 224;)

X) Also läßt sich das erste Glied jeder Reihe der Unterschiede überhaupt, wie in IIII ausdrücken.

XI. Man kann eben diesen Ausdruck, noch anders folgendergestalt ordnen: Es sey $C_1 = n$; $C_2 = \frac{n.(n-1)}{1.2}$; $C_3 = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$; u. s. w.

s. w. C (2r — 1) der 2r — 1te binomialcoeffi-
cient der Potenz n; C2r der 2rter. Die Coeffi-
cienten nach (25) gezählt. So ist erwiesener
maassen

$1 \triangle n = yn - C1.y(n-1) + C2.y(n-2) \ldots - C(2r-1).y(2r-1) + C2r.y2r \ldots . \pm y$

wo die ganze Reihe n + 1 Glieder hat, die Zei-
chen der Glieder abwechseln, und also im letzten
Gliede $\pm$ y, das obere oder untere Zeichen gilt,
nachdem n + 1 ungerade oder gerade, das ist, nach-
dem n gerade oder ungerade ist. Nun ist (Ana-
lys. 150) $C1 = C(n-1)$; $C2 = C(n-2)$ u.
$C(2r-1) = C(n-2r+1)$; $C2r = C(n-2r)$. Man kan also diese Reihe für $1 \triangle n$ rück-
wärts mit eben den Coefficienten schreiben, $Cn = 1$
das vorhin zu $\pm$ y gehörte muß jetzt zu yn gehören.
Da sieht denn die Reihe so aus

$1 \triangle n = \pm y \mp C1.y1 \pm C2.y2 \mp C3.y3 \pm C4.y4 \ldots \mp C(2r-1).y(2r-1) \pm C2r.y2r \ldots$

Ist nun hier n gerade, so gelten die obern Zeichen,
und alsdenn wird einmahl $2r = n$; und $C2r = Cn = 1$; und da bey den obern Zeichen, jedes C2r
das Zeichen + vor sich hat, so kömmt auch $Cn = 1$ mit den Zeichen + vor yn oder des letzte
Glied ist + yn

Ist aber n ungerade, so gelten die untern Zeichen;
da wird denn einmahl $2r - 1 = n$ und $C(2r-1) = Cn = 1$ es hat aber bey den untern Zeichen je-
des $C(2r-1)$ das Zeichen + also kömmt wie-
der das letzte Glied + yn und die Reihe ist also

$1\Delta n = \pm y \mp C1.y1 \pm C2y2 \ldots \mp C(2r-1).y(2r-1) \pm C2r.y2r \ldots + yn$ So steht die Reihe beym Hauſen El. Ar. Prop. 24. Schol.

725. Aufg. Wenn die erſten Glieder der Hauptreihe, und jeder Reihe der Unterſchiede, gegeben ſind, eine allgemeine Formel, die dadurch jedes Glied der Hauptreihe ausdrückt zu finden.

Auflöſ. I) $y1 = y + 1\Delta 1$; $y2 = y1 + 2\Delta 1$; aber $2 + 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$; alſo $y2 = y + 2.1\Delta 1 + 1\Delta 2$; ferner $y3 = y2 + 3\Delta 1$; aber $3\Delta 1 = 2\Delta 1 + 2\Delta 2 = 2\Delta 1 + 1\Delta 2 + 1\Delta 3 = 1\Delta 1 + 2.1\Delta 2 + 1\Delta 3$ alſo iſt $y3 = y + 3.1\Delta 1 + 3.1\Delta 2 + 1\Delta 3$. Weiter fortzugehen, muß man nur für jedes Glied jeder Reihe die Summe, aus ſeinem nächſtvorhergehenden und dem zugehörigen der nächſtfolgenden Reihe der Unterſchiede ſetzen, und in dieſer Summe eben das von neuem thun, bis man alles durch lauter erſte Glieder der Reihen ausgedrückt hat.

II) Man findet alſo ſchon in den berechneten Gliedern folgendes Geſetz

$$y11 = y + A.1\Delta 1 + B.1\Delta 2 + C1\Delta 3 \ldots + R.1\Delta r + S.1\Delta(r+1) \ldots$$

Wo A; B; C; u. ſ. w. die Binomialcoefficienten der Potenz n; und zwar R der rte in der Bedeutung (125) S der r + 1te ſind.

III)

III) Weil nun y (n + 1) gegen die zweyten Glieder der Reihen vollkommen eben die Lage hat wie yn gegen die ersten, so wird, wofern das (II) angenommene Gesetz wahr ist, auch folgendes wahr seyn.
$y(n+1) = y2 + A.2\Delta 1 \ldots + R.2\Delta r + S.2\Delta(r+1)$
Die Binomialcoefficienten ändern sich hier nicht, weil der Reihen zweyte Glieder in Absicht auf y (n + 1) das sind, was die ersten in Absicht auf yn waren.

IIII) Nun entsteht jeder Differenzenreihe zweytes Glied, wenn man zum ersten Gliede dieser Reihe das erste der folgenden addirt. Also findet sich der Wert von yn + 1 folgendergestalt

$$\begin{array}{l} y + 1\Delta 1 \\ \quad + A.1\Delta 1 + A.1\Delta 2 \\ \qquad\qquad + B.1\Delta 2 + B.1\Delta 3 \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots + R.1\Delta r + R.1\Delta(r+1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + S.1\Delta(r+1) \end{array}$$

Jeder folgende Theil von y(n + 1) besteht also aus zwey Stücken, und der (r + 1)te Coefficient ist R + S den man in 136 findet, wenn man nur dorten S; R; n; r; statt Q; P: m; n; schreibt. Er wird also

$$\frac{(n+1).n.(n-1)\ldots.(n-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\quad r+1}$$

So findet man den Coefficienten des r + 1ten folgenden Theils in y (n + 1) aus dem angenommenen Gesetze für yn.

V)

V) Aber wenn man n + 1 statt n; in S, den Coefficienten des (r + 1)ten folgenden Theils von yn; setzt, so kömmt aus der II angenommenen Formel, eben das heraus; und was in den Coefficienten multiplicirt wird, nähmlich 1 Δ (r + 1) ist auch beydemahl einerley; Also wird jeder folgende Theil von y (n + 1) durch den Schluß IIII; aus dem angenommenen Gesetze II, vollkommen so bestimmt, wie er bestimmt wird, wenn man in die Formel III; n + 1 statt n setzt. Das ist: das II angenommene Gesetzt gilt für y (n + 1) wenn es für yn gilt. Es gilt aber für y 3 (I) folglich für y 4 u. s. w. ohne Ende.

726. Anm. Die hier gelehrten Formeln, (724; 725) findet man bey verschiedenen Schriftstellern, z. E. Haussen El. Ar. Pr. XXIII. Euler Inst. Calc. diff. Cap. I. §. 10; 23; aber ihre Allgemeinheit wird von allen, die ich kenne, nur aus der Induction angenommen, daher ich mich hier bemüht habe sie mit gehöriger Schärfe zu erweisen.

Betrach-

Zahlen der Columnen.

Zahlen der Glieder.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

727. Erkl. Die Zahlen in vorstehender Tafel, die figurirten Zahlen (numeri figurati) sind so geordnet. Die erste Columne oder lothrechte Reihe enthält lauter Einheiten; die zweyte die Summen dieser Einheiten, und also die natürlichen Zahlen, aber so, daß ihr zweytes Glied, dem ersten der ersten Columne gleich oder = 1; das dritte die Summe der ersten beyden Glieder der ersten Columne, das vierte die Summe der ersten drey Glieder u. s. w. ist. Die dritte Columne enthält die Summe der Glieder der zweyten, so daß ihr drittes; viertes; fünftes u. s. w. Glied; nähmlich 1; 3; 6; die Summe der ersten; zwey; drey; vier; Glieder der zweyten Columne, u. s. w. oder o + 1; o + 1 + 2; o + 1 + 2 + 3; u. s. w. ist. So ist überhauet das p + 1te Glied der m + 1ten Columne die Summe von p Gliedern der mten. Z. E. wenn m = VIIII. und p = 11; so ist der Xten Columne 12tes Glied = 55 = o + o . . + 1 + 9 + 45 = die Summe der ersten 11 Glieder der VIIII. Columne.

728. Zus. Für m = p = 1 ist der zweyten Columne zweytes Glied = 1; der dritten drittes, für m = p = 2 u. s. w. ist der mten Columne mtes Glied = 1; Die Stellen der Glieder darüber werden mit o ausgefüllt, weil sie Summen von o seyn müßten, indem über dem ersten Gliede der ersten Columne nichts ist, das man etwa summiren könnte, Glieder in diese Stellen zu finden.

729.

729. Zus. Wenn man eine der 2; 3; u. f. Columnen als eine Hauptreihe (724) ansieht, so ist allemahl $y = o$.

730. Die zweyte Columne als Hauptreihe betrachtet, hat zum ersten Gliede ihrer ersten Differenzenreihe, das zweyte Glied der ersten Columne, der 1; die folgenden Differenzen sind alle $= o$; also ist für sie aus 725. II. das $n + 1$te Glied (724. II.) oder $yn = A = n$; z. E. für $n = 11$ ihr zwölftes Glied $= 11$.

731. Die dritte, als Hauptreihe, hat für $1 \Delta 1$ oder den Unterschied ihre ersten und zweyten Gliedes $o - o = o$ das erste Glied der zweyten; folglich für $2 \Delta 1 - 1 \Delta 1$ oder $1 - o = 1 = 1 \Delta 2$; folglich $yn = B = \frac{n.(n-1)}{1.2}$; Ihr zwölftes Glied $= \frac{11.10}{2} = 55$.

732. In der mten Columne als Hauptreihe betrachtet, ist yn so wie jedes vorhergehende Glied dieser Columne $= o$ so lange $n < m - 1$ weil in ihr die ersten $m - 1$ Glieder jedes $= o$ sind und yn das $n + 1$te Glied ist, also so lange $= o$ ist bis $n + 1 = m$.

733. I Also ist (724 IIII) $1 \Delta n = o$ so lange bis $n = m - 1$; oder die ersten Glieder der 1; 2; 3; .... m-2ten Differenzenreihe sind $= o$. Nun gehen vor der mten Columne m-1 Columnen vorher:

und die m-1te von der mten an gezählt ist die erste, in der jedes Glied = 1 ist. Also ist der m-ten Differenzenreihe erstes Glied allemahl = 1. Wenn also der mten Columne n + 1tes Glied yn heißt; so ist in desselben Ausdrucke (735 II.) jedes erste Glied jeder Differenzenreihe = 0; für welche r ⩾ m — 1; und das erste Glied der Differenzenreihe, für welche r = m — 1 ist = 1 und die Glieder der Differenzenreihen, für welche r ⩽ m — 1 sind = 0; also ist yn = R Δm-n oder das (n + 1)te Glied der mten Columne.

$$yn = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m-1}.\ 1$$

Wenn m = 7; n = 11 ist der VIII Reihe 12 Glied

$$= \frac{11.\ 10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} = 462$$

m = 5; n = 6 giebt der V Columne 7 Glied

$$= \frac{6.\ 5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 15$$

II. Die mte Columne (727) hat m-1 Nullen (728) folglich ist ihr mtes Glied das erste wirkliche, oder das erste, das eine wirkliche Zahl enthält. Also ist ihr mtes; m + 1tes; m + 2tes; . . . . m + r — 1tes das 1; 2; 3; . . . rte wirkliche Man setze also in I; n + 1 = m + r-1 oder n = m + r-2 so kömmt das rte wirkliche

$$\frac{(m+r-2).\,(m+r-3)\ \ldots\ r}{1.\ 2\ \ldots\ m-1}$$

Für

Für $r = 1; 2; 3;$ wird das $1; 2; 3;$ wirkliche $\frac{(m\ 1).(m-2)\ldots 1}{1\quad 2\ldots\ldots m-1} = 1; m; \frac{(m+1).m}{1.\ 2};$ u. s. w. Diese Formel geht für $m = 1$ oder die erste Columne nicht an; für welche auch der Ausdruck yn in 1; nicht statt findet, denn derselbe gäbe da $\frac{n.(n-1)\ldots(n+1)}{1.\ 2\ .\ .\ .\ m-1}$ wo der Zähler was Ungereimtes enthält. Die Ursache ist, weil die Voraussetzung 729; für die erste Columne nicht statt findet. Für die erste Columne ist zwar jede Differenz $= 0$; aber y unveränderlich, und also aus 725. $yn = y = 1$; wie richtig ist.

So wird das $r$te wirkliche Glied für

m	
2	r
3	$\frac{(r+1).r}{1.\ 2}$
4	$\frac{(r+2).(r+1).r}{1.\ 2.\ 3}$
5	$\frac{(r+3)\ (r+2).(r+1).r}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

u. s. w. Diese Formeln werden bey den Combinationen und andern Untersuchungen gebraucht.

734. Anm. Dieses Gesetz der figurirten Zahlen hat Jacob Bernoulli zuerst allgemein erwiesen. Art. Conjectan-

iectandi P. II. cap. III. ob man sich gleich vorlängst schon sehr mit Betrachtung dieser Zahlen beschäfftiget hatte. Sein Beweis ist von dem gegenwärtigen unterschieden. Hausen El. Ar. Prop. 25. hat denselben beybehalten und daraus den Binomischen Lehrsatz und das Gesetz der Summen und Differenzen (725. 724) hergeleitet, so wie ich diesen Vortrag umgekehrt habe.

Von den Combinationen.

735. Erkl. Wenn man aus einer gegebenen Menge von Dingen, soviel Paare, soviel Dreyen, Vieren, u. s. w. nimmt als sich thun läßt; so heissen solches Combinationen, Conternationen, Conquaternationen; u. s. w. überhaupt Verbindungen und gemeiniglich Combinationen nach 2; 3; 4. u. s. w. (Siehe 224.)

736. Man verfahre auf diese Art mit den ersten fünf Buchstaben des Alphabets. Diese geben folgendes.

Columnen	I	II	III	IIII	V
1	a	o	o	o	o
2	b	ab	o	o	o
3	c	ac; bc;	abc;	o	o
4	d	ad; bd; cd;	abd; acd; bcd;	abcd;	o
5	e	ae; be; ce; de;	abe; ace; bce; ade; bde; cde	abce; abde; acde; bcde	abcde

Glieder.

737. In der Columne I stehen die einzelnen Sachen; In II die Paare, die sich aus 2; 3; u. s. w. Dingen nehmen lassen. Es ist klar, daß sich zuerst ein Paar aus zwey Dingen nehmen läßt, und daß man also, wenn die Zahl der Dinge = 1 ist; ○ Paar hat. Kömmt das dritte Ding dazu, so gibt es mit jedem der beyden vorigen ein neues Paar; und das vierte mit jedem der drey vorigen; zu den Paaren also, die p Dinge geben, kommen noch p neue Paaren, wenn das p + 1te Ding dazu kömmt, die Menge dieser neuen Paare also, d. i. das p + 1te Glied der II Col. ist der Summe von p Einheiten gleich, und ist also 0; 1; 2; 3; 4; u. s. w. für p = 0; 1; 2; 4, u. s. w. Vergleicht man also die ersten beyden Columnen hier mit den ersten beyden 727. so ist die Menge der neuen Pare, welche die p + 1te Sache giebt, = p oder das p + 1te oder p'te Glied der II. Col. 727 ist die Zahl der Paare, die sich im p + 1ten oder pten Gliede der II. Col. 736 befinden. Die Menge aller Paare, die sich zusammen aus p Sachen machen lassen, ist also die Summe von p Gliedern der II. Col. 721. d. i. das p + 1te Glied der III. Col. das. folglich ist, n statt p gesetzt, die Menge aller Paare, die sich aus n Sachen nehmen lassen, zusammen $= \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}$ (721)

738. Brinat man zu jedem der Paare, die sich aus den vier Dingen a; b; c; d; machen lassen, das fünfte e; so hat man alle die Verbindungen nach 3 die sich aus diesen fünf Dingen so machen lassen,

lassen, daß sich das fünfte zuerst darinnen befindet, oder man hat das fünfte Glied der III. Col. 736. Eben so hat man ihr viertes Glied, oder die Menge aller Verbindungen nach 3 die sich aus vieren so machen lassen, daß das letzte oder vierte zuerst darinnen ist, wenn man zu allen Paaren, die sich aus dreyen machen lassen, das vierte bringt, u. s. w. Ich sage zuerst weil es nachgehends auch in den folgenden Verbindungen vorkömmt, die e enthalten. Also ist die Menge der Verbindungen im 5; im 4; im 3; u. s. w. Gliede der III. Col. 736; dem 5; dem 4; dem 3; Gliede der III. Col. 736. u. s. w. gleich;

Ueberhaupt, wenn man zu jedem der Paare, die sich aus n-1 Dingen machen lassen, das nte bringt, so hat man alle Verbindungen nach 3 die sich aus n Dingen so machen lassen, daß das letzte in ihnen befindlich ist, oder man hat das nte Glied der III. Col. 736; die Menge der in ihm befindlichen Verbindungen nach 3 ist also mit dem nten Gliede der III. Col. 727 einerley; folglich ist die Menge aller Verbindungen nach 3 für n Dinge in der III. Col. 736. zusammen so groß als die Summe von n Gliedern der III. Col. 727; d. i. so groß als das n + 1te

der dasigen vierten, oder $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

(732.)

739. Man setze, die q-1te Columne 736; enthalte die Verbindungen nach q-1 von n Dingen abc ... fg das letzte soll nähmlich g; und sein

nächstvorhergehendes f heissen: Ihr n tes Glied enthalte die Verbindungen, in denen die n te Sache g zuerst zu finden ist, und so überhaupt ihr unbestimmtes p tes, die Verbindungen nach q - 1 in denen von diesen n Sachen, die p te zuerst zu finden ist. Nun nehme man an, die Menge der Verbindungen in jedem solchen p ten Gliede, sey so groß als das eben sovielte oder p te Glied der q - 1 ten Columne 727; kömmt zu ieder solcher Verbindung von p Sachen nach q - 1; die p + 1 te Sache; so erhält man die Verbindungen nach q die sich aus p + 1 Sachen so machen lasseu, daß die p + 1 te zum erstenmahle darinnen vorkömmt; oder man erhält das p + 1 te Glied der q ten Columne 736; dieses Glied enthält also soviel Verbindungen nach q von p + 1 Sachen, soviel es zusammen Verbindung nach q - 1 von p Sachen gibt; das ist, vermöge des Angenommenen, soviel die Summe von p Gliedern der q - 1 ten Columne 727 beträgt; das ist, vermöge der Einrichtung der Reihen 727; soviel das p + 1 te Glied der q ten Columne 727 beträgt. Es stellt aber jedes Glied der 3 Col 736; die Menge von Verbindungen nach 3 von p Dingen vor, in denen das p te zum erstenmahle vorkömmt, wie aus 736 erhellt, wenn man p statt des dortigen n setzt. Also ist das, was angenommen wird, für q - 1 = 3 wahr, und folglich ist, für q = 4; wahr, daß die Menge der Verbindungen von p + 1 Sachen nach q; welche das p + 1 te Glied der 4 Col. 736 enthält dem p + 1 ten Gliede der 4 Col. 727 gleich ist, das heißt, weil p

un-

unbestimmt ist, daß die Menge der Verbindungen in jedem Gliede der 4 Col, 736; dem eben sovielten der 4 Col. 727 gleich ist. Nun setze man q - 1 = 4; und folglich q = 5; so ist erwiesenermassen das Angenommene für die vierten Columnen wahr; die Mengen der Verbindungen nach vieren in jedem Gliede der einen, sind nähmlich dem eben sovielten der andern gleich; also folgt für die fünften Columnen, daß die Mengen der Verbindungen nach fünfen in jedem Gliede der einen, dem eben sovielten der andern gleich sind. Und so geht der Schluß für q - 1 = 5; und q = 6; für q - 1 = 6 und q = 7 u. s. w. ohne Ende fort, oder überhaupt ist die Menge der Verbindungen nach q in jedem Gliede der q ten Columne 736 so groß als das eben sovielte Glied der q ten Col. 727.

740. Die Menge aller Verbindungen nach q von n Dingen, ist also die Summe von n Gliedern der q ten Col. 727; oder das n + 1 te der q + 1 ten; also wenn q + 1 = m (733)

$$= \frac{n.(n-1).\ldots\ldots.(n-q+1)}{1.2.\ldots\ldots\ldots q}$$

741. Ex. Wie viel mahl können aus 40 (= n) Dingen 9 (= q) genommen werden? Antw.

$$\frac{40.39.38.37.36.35.34.33.32.}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.}$$

= 37. 32. 19. 17. 13. 11. 5 = 273 438 880. Wenn Lombre unter dreyen gespielt wird, so kann jeder

beym

beym Kartengeben soviel verschiedene Spiele bekommen, so vielmahl aus den 40 Karten 9 können genommen werden, so daß niemahls alle 9 die er einmahl bekömmt mit allen 9 die er ein andermahl bekömmt einerley sind. Die Menge dieser verschiedenen Spiele, die einer in die Hand bekommen kann, zeigt das Exempel. Diese Menge muß noch mit 3 multiplicirt werden, weil eben die Karten ihm ein anderes Spiel geben, nachdem er der erste, zweyte, dritte, in der Ordnung der Spielenden ist. Dieses ist nur die Menge der möglichen Spiele in Absicht auf die Karten, welche man in die Hand bekömmt, ohne Betrachtung des Kaufens u. s. w.

742. Die Menge der möglichen Fälle, wo man die Spadille und Baste gleich beym Kartengeben bekommen kann, findet sich so: Man sucht die möglichen Verbindungen von 38 Blättern nach 7; d. i. man sucht, wievielmahl einer 7 Blätter, die nicht alle einerley sind, aus den 38 bekommen kann, welche noch übrig bleiben, wenn die Spadille und Baste davon genommen sind. Dazu die beyden erwähnten gerechnet giebt, wievielmahl er 9 Blätter bekommen kann, daß die erwähnten gegebenen darunter sind. Es erhellt, daß dieses von jedem zwey bestimmten Blättern gilt. Die Rechnung giebt also für $n = 38; q = 7;$

$$\frac{38.\ 37.\ 36.\ 35.\ 34.\ 33.\ 32}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} = 38.\ 37.\ 34.\ 33.\ 8$$

$= 13\,148\,076.$

743.

743. Vergleicht man diese Fälle mit allen möglichen Spielen (741) und zwar nur die Millionen, um eine Verhältniß, die ohngefähr richtig ist, zu haben, so bekömmt mar 13: 273 oder ohngefähr 1: 21; Wan kann also annehmen, daß unter 21 Fällen überhaupt nur einer ist, da man die erwähnten beyden Blätter bekömmt, oder daß die Wahrscheinlichkeit sie zu bekommen, zu der Wahrscheinlichkeit sie nicht zu bekommen, sich verhält wie 1: 20

744. Hätte man sie nicht bekommen, sondern verlangte sie zu kaufen, so müßte man erstlich die möglichen Fälle suchen, da sie sich unter den 13 Karten, die zum Kaufen da liegen, befinden; und nachgehends die Fälle, da sie unter diesen Karten die Stellen einnehmen, daß man sie beym Kauf bekäme; das letztere beruht auf der Berechnuug der Versetzungen (51) wenn man z. E. zuerst kaufte und 6 kaufte, so käme es darauf an, wieviel Ordnungen die 13 liegenden Blätter überhaupt haben könnten, und wieviel es darunter Ordnungen gäbe, da sich zwey bestimmte Blätter unter den obersten 6 befänden.

745. Hieraus wird begreiflich werden, wie die Lehre von den Verbindungen und Versetzungen (51) dient, mögliche Fälle, und folglich Wahrscheinlichkeiten bey den Spielen auszurechnen, wovon Jac. Bernoulli in s. Arte Coniectandi P. II. gehandelt hat. Man s. auch De Moivre; Doctrine of Chances u. a.

746.

746. Man kann auch Verbindungen berechnen, wo in einer eben die Sache mehr als einmahl vorkömmt. Weil die vollständige und allgemeine Abhandlung für meine gegenwärtige Absichten zu weitläuftig fällt, so will ich dieses nur mit einem Exempel erläutern.

744. Die vier ersten Lautbuchstaben sollen allgemein bejahende und verneinte Sätze bedeuten, wie in der Logik in der Lehre von den Syllogismen gewöhnlich ist. Man fragt, wieviel modi von Syllogismen möglich sind. Die Beantwortung kömmt darauf an, daß man aus diesen vier Buchstaben, soviel Verbindungen nach dreyen macht, als sich machen lassen, worinnen auch jeder zwey oder dreymahl vorkommen kann. Aus diesen Verbindungen aber muß man diejenigen wegwerfen, welche mit den Regeln der Syllogismen nicht bestehen können.

	I	II
1	a	aa
2	e	ae; ee
3	i	ai; ei; ii;
4	o	ao; eo; io; oo

747. Die II. Col. enthält alle Verbindungen nach 2 die sich aus vier Dingen machen lassen, wenn man auch eines wiederhohlen darf. Ihre Glieder sollen jedes die beyden Vordersätze von einem Schlusse vorstellen; Also bedeutet ihr erstes

Glied

Glied einen Schluß, dessen beyde Vordersätze allgemein bejahend sind: In ihrem zweyten Gliede bedeutet ae zweene Vordersätze, da einer allgemein bejahend, der andere allgemein verneinend ist, es kann aber jeder dieser beyden Sätze der Ober- oder der Untersatz (maior; minor) seyn, oder ihre Ordnung, den Obersatz zuerst, genannt, kann ae; ea; seyn. So bedeutet ee daß beyde Vordersätze allgemein verneint sind; und im 3 Gliede; ai daß einer allgemein bejahend, der andere besonders verneind ist. u. s. w. Setzt man nun also zu jeden Paare der solchergestalt angezeigten Vordersätze einen Schlußsatz, und versetzt die Buchstaben, welche der Vordersätze Beschaffenheit anzeigen, wenn sie sich versetzen lassen; so bekömmt man alle Gattungen von Schlüssen. Um aber keine unnützen mit zu bekommen, so beobachtet man folgende Regeln. I) Aus blossen verneinenden oder besonderu Vordersätzen folgt nichts. II) Der Schlußsatz richtet sich nach dem schwächern Theile. III) Aus blossen bejahenden Vordersätzen folgt was Bejahendes. Solchergestalt bekömmt man zu

aa; a (1; e und o bleiben weg III. Reg.
i (2
ae; e (3; a und i bleiben weg II. R.
o (4
ai; i (5; III. II. R.
ei; o (6; II. R.
ii; gibt nichts I. R.
ao o (7; II. R.
eo; io; oo; geben nichts 1 Reg.

Nun giebt es in 1 und 2. keine Versetzung für a a; in jeder der übrigen Classen lassen sich zwo Ordnungen der Vördersätze annehmen: also giebt jede zwo Gattungen von Schlüssen. Also kommen überhaupt 2 + 5. 2 = 12 Gattungen von Schlüssen heraus, die durch die Ordnung und Beschaffenheit der Sätze unterschieden sind. Kömmt aber eine solche Gattung in zwo oder mehr Figuren vor, so bekömmt sie in jeder den Nahmen eines eigenen Modi. So gibt

a a a; b Ar b A r A 1 Fig. a a i; d A r A p t i 3 Fig, b A l A r I 4 F. a e e; c A mestres 2 F. c A d E r E 4 F. e a e; c E l A r Ent 1 F. c E s A r E 2 F. a e o; hat keinen Modum. e a o; f E l A p t O n 3 F. f E g A r O 4 F. a i i; d A r I I 1 F. d A t I s I 3 F. i a i; d I s A m I s 3 F. d I g A m I 4 F. e i o; f E r I O 1 F. f E s t I n O 2 F. f E r I s O n 2 F. f E d I b O 4 F. i e o; hat keinen modum. a o o; b Ar O c O 2 F. o a o; b O c Ar d O 3 F.

748. Eine andere Berechnung der modorum der Schlüsse giebt Leibniz Art. Combinatoria Probl. II. p. 13; wo er aber die Sätze in allgemeine, besondere, unbestimmte und einzelne abtheilet. In der nur mitgetheilten Erzählung der Schlußarten, fehlt keine, die von den logischen Schriftstellern erwähnt wird.

749. Anm. Die Zahlen der dritten Columne 727. heissen Triangularzahlen der vierten Tetragonalzahlen u. s. w. Die alten Algebraisten haben sich sehr mit ihnen beschäfftiget. Ich will noch als eine Anwen-

wendung davon nachstehendes beybringen. Den Satz überschrieb mir der verstorbene Herr Prof. Kraft aus Tübingen, daß ich den Beweis davon suchen sollte; den ich auch bald fand.

750. Wofern m eine ganze bejahte Zahl bedeutet, so ist $\frac{2^{4m+1} - 2^{2m} - 1}{9}$ eine Triangularzahl.

Bew. Wenn N eine ganze Zahl bedeutet, so ist $\frac{2^{2m} - 1}{3} = N$, wie aus 243 folgt, wenn $b = 4$; $\varepsilon = m$; $a = 1$ gesetzt wird. Also ist $2^{4m} = (3N + 1)^2$ und $2^{4m+1} = 18NN + 12N + 2$; hievon $2^{2m} + 1 = 3N + 2$ abgezogen läßt $2^{4m+1} - 2^{2m} - 1 = 18NN + 9N = 9N.(2N + 1) = 9.\frac{(2N+1).2N}{1.2}$; dieses mit 730 verglichen, giebt $n = 2N + 1$ also ist $\frac{2^{4m+1} - 2^{2m} - 1}{9}$ die $2N +$ 2te Trigonalzahl.

Für $m = 3$ ist $N = 21$; und $\frac{8192 - 64 - 1}{9} = 903 = \frac{43.43}{1.2} = \frac{(2.21+1).2.21}{1.2}$; also ist $n = 2.21 + 1 = 43$ oder die Zahl ist die 44ste Trigonalzahl.

Man kann diese Untersuchung noch allgemeiner machen, wie ich in den Commentariis Soc. Reg. Scient. Gottingenſ. T. I. gewieſen habe.

Erweis des Lehrſatzes von der Verhältniß der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln.

In Newtons *Arithm. Vniuerſ.* am Ende des Hauptſtückes *de transmutationibus aequationum*, auf der 192. Seite der gravesandiſchen Ausgabe.

751. Man ſetze, eine Gleichung ſey ſo eingerichtet, das die höchſte Potenz von x zur linken Hand des Gleichheitszeichens alleine uud ohne Coefficienten ſteht, die andern nach der Reihe zur rechten Hand ſich befinden, und heiſſe die Coefficienten auf der rechten Hand α, β, γ, δ, u. ſ. f. Man nenne ferner R die Summe der Wurzeln, R 2 die Summe ihrer Quadrate, R 3 die Summe der Cuborum, R 4 der Biquadrate, und überhaupt R r der Potenzen vom Exponenten r, R (r-1) der Potenzen von Expon. r-1 u. ſ. f. ſo iſt $R = \alpha$, $R2 = \alpha R + 2\beta$, $R3 = \alpha R2 + \beta R + 3\gamma$,

R 4

$R4 = \alpha R3 + \beta R2 + \gamma R + 5\delta$ und überhaupt $Rr = \alpha R(r-1) + \beta R(r-2) + \gamma R(r-3) \ldots + \varrho R + r\sigma$. Wo σ den Coefficienten zum Exponenten $m-r$, und ϱ den nächst vorhergehenden, in einer Gleichung vom Grade m bedeutet. z. Ex. Es sey $x^4 = x^3 + 19xx - 49x + 30$. So ist $\alpha = 1\ \beta = 19.\ \gamma = -49.\ \delta = 30$. Also $R = 1$, $R2 = 1.R + 2.19. = 39$, $R3 = 1R2 + 19.R - 3.49 = 39 + 19 - 147 = -89$, $R4 = 1R3 + 19.R2 - 49.R + 4.30 = -89 + 19.39 - 49 + 120 = 723$. Die Wurzeln der Gleichung aber sind 1, 2, 3, und -5 also ist allerdings $R = 1 + 2 + 3 - 5 = 1$, $R2 = 1 + 4 + 9 + 25 = 39$, $R3 = 1 + 8 + 27 - 125 = -89$, $R4 = 1 + 16 + 81 + 625 = 723$. Newton hat diesen Satz am angeführten Orte ohne Beweis erwähnt. Johann Bernoulli, (*)und Herr Euler (**) brauchen ihn, die Summen gewisser Reihen zu finden, und der erste sagt, daß er einen Beweis davon hätte, der aber in seinen Werken nicht anzutreffen ist. Der gelehrte Herr Professor Bärman zu Wittenberg hat einen Beweis davon in der Schrift gegeben, mit der er 1745 den Antritt seines Lehramts angekündiget. (***) Folgende Schlüsse, die, wie die Vergleichung leicht zeigen wird, mit des Herrn Prof. Bärmanns seinen nichts gemein haben, schei-

(*) *Op. T. IIII.* n. 153. *art.* 8.
(**) *Act. Petrop. T. VII.*
(***) *Demonstratio theorematis Algebraici Vit.* 1745.

nen mir ebenfalls die Sache kurz und deutlich dar-zuthun.

I. Satz.

Die Verhältniß zwischen den Summen der P[illegible]tenzen der Wurzeln und den Coefficienten in einer cubischen Gleichung zu finden.

Aufl. Wenn die Wurzeln einer cubischen Gleichung g, h, k, sind, also daß $x - g = o$, $x - h = o$, $x - k = o$ so wird die Gleichung seyn

$$\begin{array}{lll} x^3 - g & + gh & \\ - hx^2 & + ghx & - ghk = \\ - k & + hk & \end{array}$$

Nun sey eine cubische Gleichung überhaupt $x^3 - Ax^2 - Bx - C = o$ so ist $g + h + k = A$. $gh + gk + hk = -B$ und $ghk = C$. Folglich $AA = gg + 2gh + hh + 2gk + 2hk + kk = gg + hh + kk - 2B$. Also $AA + 2B = gg + hh + kk$. Das ist $A. (g + h + k) + 2B = gg + hh + kk$. Ferner, wenn man für x erstlich g, nachgehends h, und endlich k setzt.

$$\begin{array}{l} g^3 = Agg + Bg + C \\ h^3 = Ahh + Bh + C \\ k^3 = Akk + Bk + C \\ \hline g^3 + h^3 + k^3 = A\ (gg + hh + kk) + B. \\ (g + h + k) + 3C \\ = A. (AA + 2B) + BA + 3C \end{array}$$

II. Satz.

II. Satz.

Es sey $x^m = \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots + \delta$
$x^{m-n+1} + \varepsilon x^{m-n} + \zeta x^{m-n-1} \ldots +$
$\varpi x^{m-r+2} + \varrho x^{m-r+1} + \sigma x^{m-r} \ldots + \omega$

Für welche Gleichung ich das Zeichen ⊙ gebrauchen will. Es seyn ferner g, h, . . . k, die Wurzeln dieser Gleichung, so daß die erste g die letzte k ist, ihre Zahl wird m seyn. Man nenne ferner ihre Summe $g + h \ldots + k = R$ die Summe ihrer Quadrate $g^2 + hh \ldots + kk = R2$ und überhaupt die Summe der Potenzen u, nähmlich $g^u + h^u \ldots k^u = Ru$. Es wird die Verhältniß zwischen den Coefficienten der Gleichung ung der Summe von den Potenzen m, der Wurzeln gesucht.

Aufl. Wenn man verfährt, wie am Ende des vorigen Satzes, so erhält man

$g^m = \alpha g^{m-1} + \beta g^{m-1} \ldots + \omega$
$h^m = \alpha h^{m-1} + \beta h^{m-2} \ldots + \omega$
. .
. .
. .
$k^m = \alpha k^{m-1} + \beta k^{m-2} \ldots + \omega$

$Rm = \alpha Rm-1 + \beta . Rm-2 + \gamma . Rm-3 . .$
$+ m . \omega$

III. Satz.

Newtons Formel die ich künftig ☿ bezeichnen werde, ist

$$Rr = \alpha R r\text{-}1 + \beta Rr\text{-}2 \ldots \delta Rr\text{-}n + 1 + \varepsilon Rr\text{-}n + \zeta Rr\text{-}n\text{-}1 \ldots + \varrho R + r.\ \sigma$$

Man nehme an, diese Formel gelte für die Gleichung ⊙ vom Grade m, dergestalt daß sie eintrifft, man mag setzen $r = m, r = m - 1. r = m - 2.$ u. s. f. Wenn dieses ist, so wird auch folgen, daß sie auch für die nächst höhere Gleichung vom Grade $m + 1$ gilt.

Beweis. Zu den Wurzeln der Gleichung des II. S. komme noch die $m + 1$te $x = 1$. so wird die Gleichung des II. S. auf c gebracht, und mit $x - l$ multiplicirt folgendes geben.

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} \ldots - \delta x^{m-n+1} - \varepsilon x^{m-1} - \zeta x^{m-n-1} \ldots - \varpi x^{m-r+2} - \varrho x^{m-r+1} - \sigma^{m-r} \ldots \ldots\ldots - \omega = 0$$

$$x - l = 0$$

$$x^{m+1} - (\alpha + l) x^m - (\beta + \alpha l) x^{m-1} \ldots\ldots - (\varepsilon + \delta l) x^{m-n+1} - (\zeta + \varepsilon l) x^{m-n} \ldots\ldots - (\varrho + \varpi l) x^{m-r+2} - (\sigma + \varrho l) x^{m-r+1} - (\tau + \sigma l) x^{m-n}$$

b. l.

$$x^{m+1} = (\alpha + l) x^m + (\beta - \alpha l) x^{m-1} \ldots + (\varepsilon - \delta l) x^{m-n+1} + (\zeta - \varepsilon l) x^{m-n} \ldots + (\varrho - \varpi l) x^{m-r+2} + (\sigma - \varrho l) x^{m-r+1} + (\tau - \sigma l) x^{m-1}$$

Die-

Diese Gleichung soll ℂ heissen. Wenn nun die Summe der Potenzen u von den Wurzeln der Gleichung ⊙, Ru genennet wird, so heist die Summe von eben den Potenzen der Wurzeln der Gleichung ℂ, Ru + lu z. E. Wenn u = 2 und also R2 die Summe von den Quadraten der Wurzeln der Gleichung des II. S. bedeutet, so muß zu dieser Summe noch l1 addirt werden, die Summe von den Quadraten der Wurzeln der Gleichung Γ zu haben, welche also R2 + l1 ist. Wenn nun Newtons Formel, die für jeden Werth von r, so nicht grösser ist, als m, in der Gleichung ⊙, als richtig angenommen wird, für eben den Werth von r, für den sie in ⊙ gilt, auch in ℂ gelten soll, so muß folgendes statt finden:

$$\begin{pmatrix} Rr = \alpha \\ +lr+l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Rr-1 + \beta \\ +lr-1 - \alpha l. \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R1-2 \quad \varepsilon \\ +lr-2 - \delta l \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} Rr-n \quad +\zeta \\ +lr-n \quad -\varepsilon l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rr-n-1 \\ lr-n-1 \end{pmatrix}$$

$$, \ldots \begin{pmatrix} +\varrho \\ -\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \quad +r. \int\sigma \\ +1 \quad \left\{-l\varrho \right. \end{pmatrix}$$

Welche Gleichung ich ♂ nennen will. Sie kömmt heraus, wenn man in Newtons Formel ♀ an statt Ru setzt Ru + lu z. E. R2 + l2 statt R2, und statt α, β, u. s. f. welches die Coefficienten der Gleichung ⊙ waren, die Coefficienten der Gleichung ℂ nähmlich α + l, $\beta - \alpha$ l, u. s. f. braucht. Soll nun ferner diese Gleichung richtig

seyn,

seyn so muß auch folgende gelten, die heraus kömmt, wenn man ♀ von ♂, die linken Glieder von den linken, und die rechten von den rechten abzieht.

$$\begin{aligned} lr = {} & \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} \quad + \varepsilon l^{r-n} \quad + \zeta l^{r-n-r} \\ & + l Rr-1 - l\alpha Rr-2 \ldots - \delta l Rr-n - \varepsilon l Rr-n-1 \ldots \\ & + l^r \quad - \alpha l^{r-1} - \delta l^{r-n+1} - \varepsilon l^{r-n} \\ & \ldots + l\varrho \quad - r l\varrho \\ & - l\pi R \\ & - l^2 \pi \end{aligned} \qquad (\mathcal{U}$$

In dieser Gleichung $\mathcal{U}$ heben sich die Potenzen r von l, auf der linken Seite, und im untersten Gliede der ersten Columne auf der rechten Seite auf. Eben so hebt sich das oberste Glied einer jeden Columne mit dem untersten der nächstfolgenden auf, bis auf die letzte ohne eine und die letzte, deren beyde oberste Glieder zusammen ausmachen, $l\varrho.(1-r)$, daß also folgendes herauskömmt, wo nur noch die mittelsten Glieder der Columnen übrig sind:

$$\begin{aligned} o = l\,(& Rr - 1 - \alpha Rr - 2 \ldots - \delta R(r-n) - \\ & \varepsilon Rr-n-1 \ldots - \pi R) + l\varrho.(1-r) \end{aligned} \qquad (\mathfrak{h})$$

Die Richtigkeit vorstehender Gleichung $\mathfrak{h}$ aber erhellt aus folgendem; Weil die Formel ♀ für jeden Werth von r in ⊖ angenommen wird, so muß sie auch richtig bleiben, wenn r-1 statt r gesetzt wird, und also nachstehende Gleichung ♀ gültig seyn.

$Rr\text{-}1 = \alpha Rr\text{-}2 + \beta Rr\text{-}3 \ldots + \delta R(r\text{-}n) + \varepsilon R(r\text{-}n\text{-}1) \ldots + \pi R + (r\text{-}1)\varrho$ nämlich wie $r\sigma$ vorhin das letzte Glied der Gleichung ☿ war, weil σ als Coefficient zu der Potenz m-r von x gehörte, so schließt hier $(r\text{-}1)\varrho$ die gegenwärtige Gleichung, weil ϱ als Coefficient zu der Potenz m-r-1 von x gehört, und ♀ aus ☿ wird, indem man r-1 statt r setzt. Die Gleichung ♀ nun giebt $R(r\text{-}1) - \alpha R(r\text{-}2) - \beta R(r\text{-}3) \ldots - \delta R(r\text{-}n) - \varepsilon R(r\text{-}n\text{-}1) - \pi R = r\text{-}1.\ \varrho$ und folglich verwandelt sich die Gleichung ☿ in $o = l.(r\text{-}1)\varrho * l\varrho.(1\text{-}r,)$ welches richtig ist.

Vorgehende Schlüsse zeigen, daß die Formeln ☿, ♀, und ♂ zusammengenommen, endlich die Gleichung $o = l\varrho.(r\text{-}1) + l\varrho.(1\text{-}r)$ geben. Den Beweis des Hauptsatzes aber einzusehn, gehe man von dieser letztgefundenen Gleichung rückwärts, und nehme ausser ihr nur noch die Gleichungen ☿ und ♀ für wahr an. Man setze nämlich in der Gleichung $o = l(r\text{-}1)\varrho + l\varrho(1\text{-}r)$ statt $(r\text{-}1)\varrho$ den Werth davon, der einige Zeilen zuvor aus der Gleichung ♀ gefunden worden, so verwandelt sich $l(r\text{-}1)\varrho + l\varrho(1\text{-}r) = o$ in die Gleichung ♄. Zu derselben addire man folgende:

$$lr = \alpha l^{r\text{-}1} + \beta l^{r\text{-}2} \ldots + \varepsilon l^{r\text{-}n} + \zeta l^{rn\text{-}1} \ldots$$
$$+ l^{r} - \alpha l^{r\text{-}1} - \delta l^{r\text{-}n+1} - \varepsilon l^{r\text{-}n} - ll\pi$$

nám-

nämlich eine Gleichung, so aus den Gliedern bestehet, die sich in der Gleichung ♃ aufhoben, so ist klar, daß ♃ aus ♄ entstehen wird. Wenn man nun zu ♃ wiederum ☿ addirt, so erhält man ♂ deren Richtigkeit zu beweisen war. Es ist also gezeigt worden, daß, aus den vorausgesetzten Gleichungen ☿ und ☿, das ist, aus der newtonischen Formel für den Grad m angenommen, die Wahrheit eben dieser Formel für den Grad m + 1 folge, so lange r in der Gleichung ☾ nicht grösser ist, als es in ☉ werden kann; denn der Beweis setzt in beyden Gleichungen einerley Grösse von r zum voraus. Nun aber ist der gröβte Werth der r in ☉ haben kann, r = m, und also bloß noch übrig, darzuthun, daß die Formel ♂ auch richtig sey, wenn r = m + 1. Dieses wird für ☾ eben so dargethan, wie es für ☉ im II. Satze geschehen.

IIII. Satz.

Die newtonische Formel des III. Satzes gilt für alle Gleichungen, n und m mögen so groß seyn, als sie wollen.

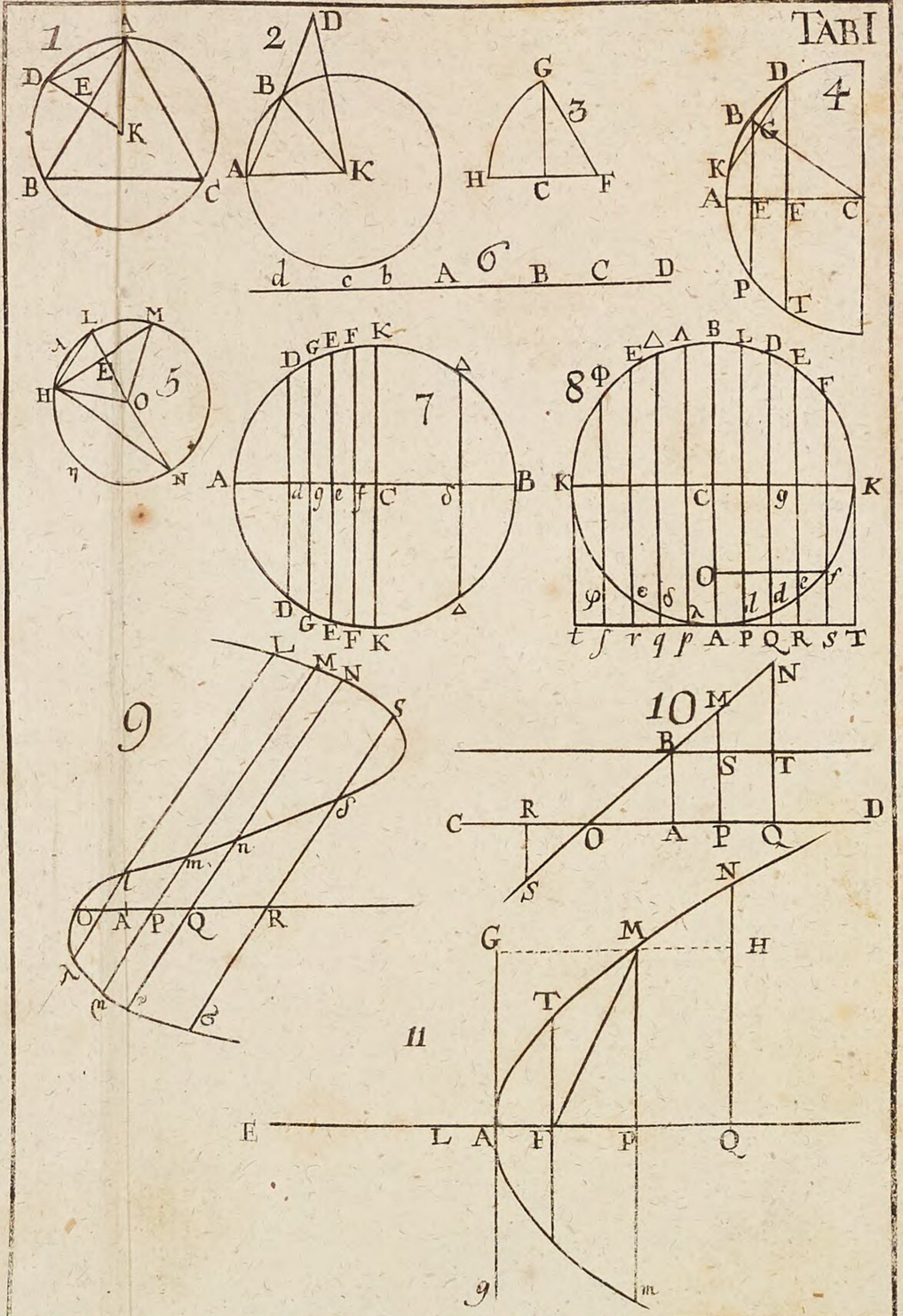
Bew. Wenn m = 3, so gilt diese Formel für jeden Werth, den r in der cubischen Gleichung haben kann, nämlich für r = 3, r = 2r = 1. (1. Satz.) Sie gilt also auch, vermöge des III. Satzes für jeden Werth, den r in der biquadratischen Gleichung haben kann. Hieraus folgt, daß man nun setzen könne m = 4 und also m + 1 = 3, d. i. daß Newtons Regel, weil sie vom 4. Grade gilt, auch

vom

vom 5. gelten müsse. Wenn sie aber vom 5. gilt, so gilt sie auch, vermöge des III Satzes, vom 6ten, und so geht es ohne Ende fort. Hat man also ihre Richtigkeit für die cubische Gleichung erwiesen, so gilt sie vermöge des III. Satzes, für alle höhere, indem man immer von einer auf die nächst höhere, von dieser, auf die nächstfolgenden u. s. f. schließt. Für die quadratische Gleichung ist die Regel auf eben die Art zu beweisen, wie für die cubische, nur daß der Beweis noch kürzer fällt.

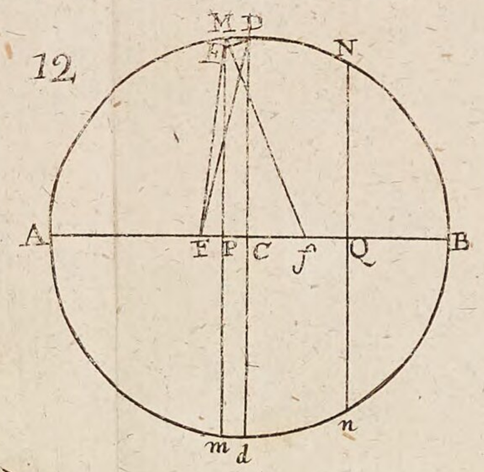
Vorhergehender Beweis findet sich in der zu Leipzig anfangs unter des jezigen Kön. Dänischen Hrn. Oberhofprediger Cramers, nachmahls unter Hrn. Mylius Aufsicht herausgegebenen Philosophischen Untersuchungen und Nachrichten, 6 Stücke; das 1746 herausgekommen ist.

TABI

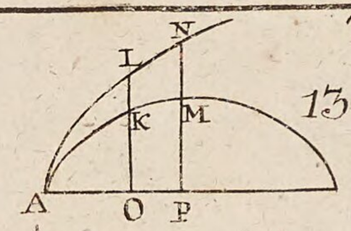

1
A
D
E
K
B
C
2
D
B
A
K
3
G
H
C
F
4
D
B
G
K
A
E
F
C
P
T
d c b A B C D
5
L
M
H
O
η
N
7
D G E F K
A
a g e f C δ B
D G E F K
8 Φ
E A B L D E F
K
C g K
O
φ ε δ λ l d e f
t s r q p A P Q R S T
9
L M N
S
O A P Q R
10
M N
B
S T
C R O A P Q D
S
11
N
G M H
T
E
L A F P Q
g m

TAB II

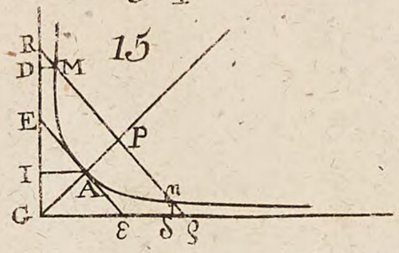
12



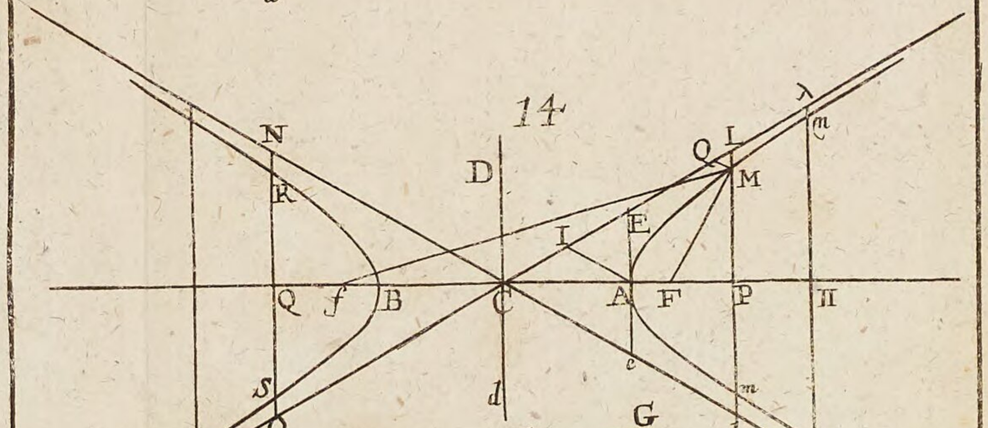
13



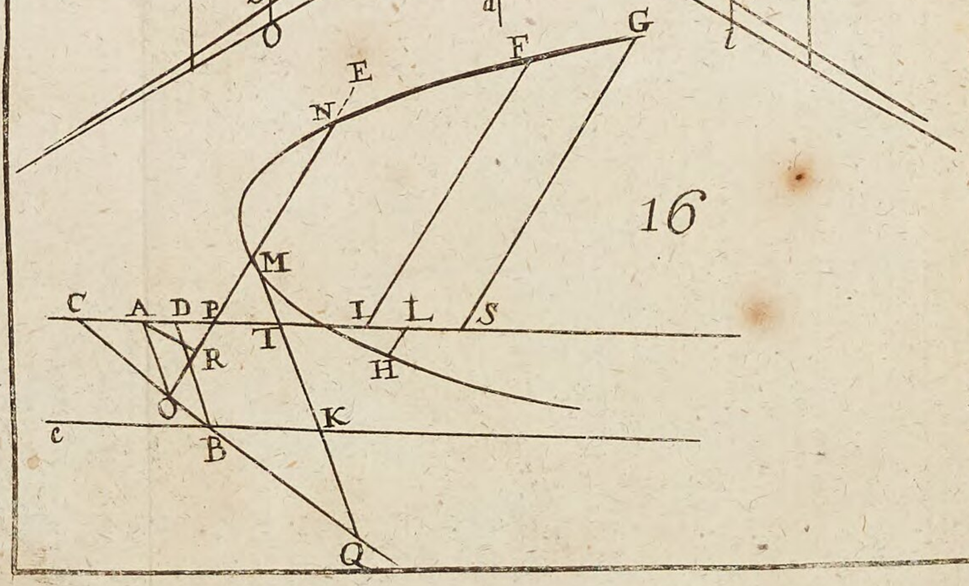
15



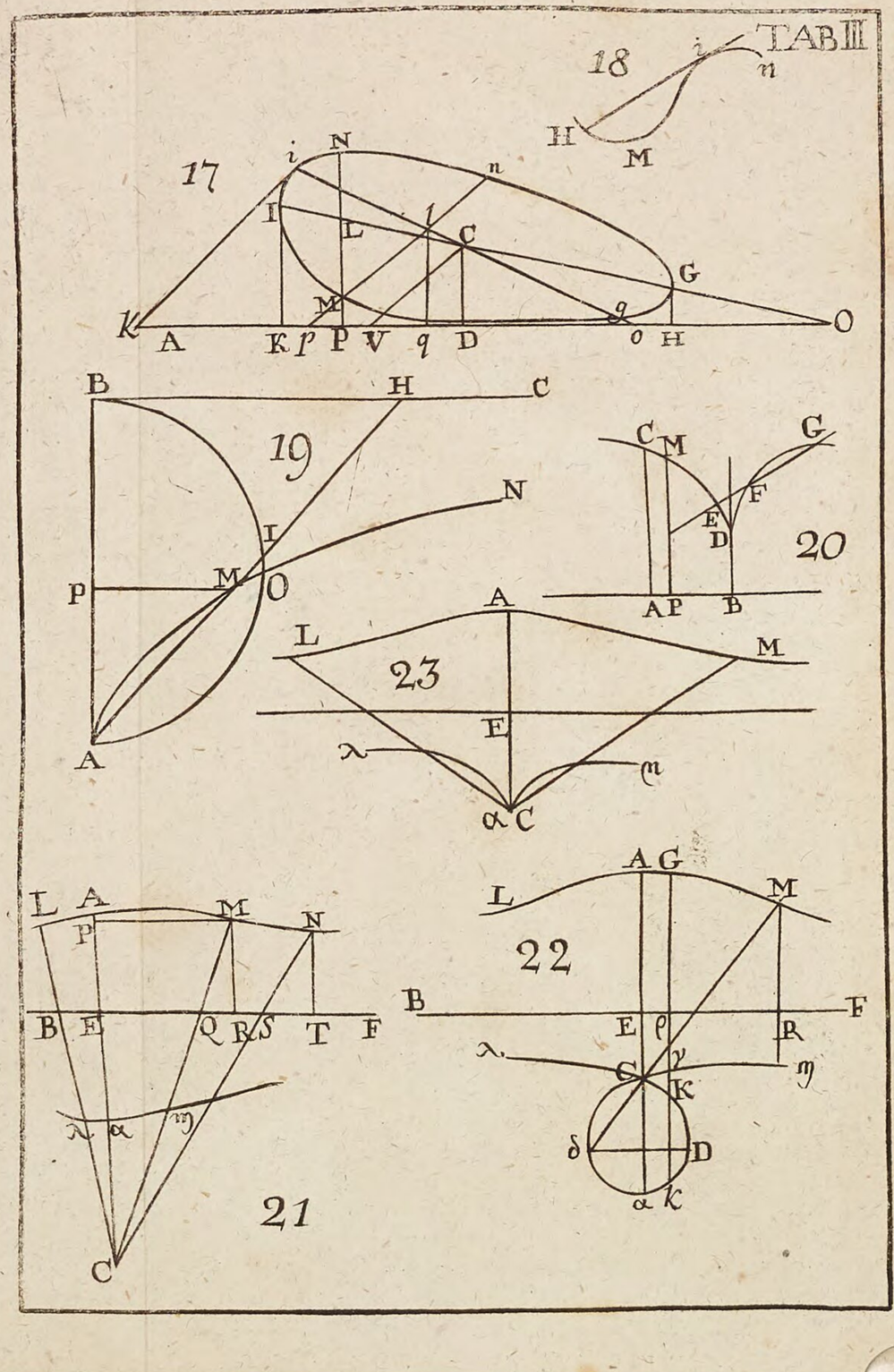
14



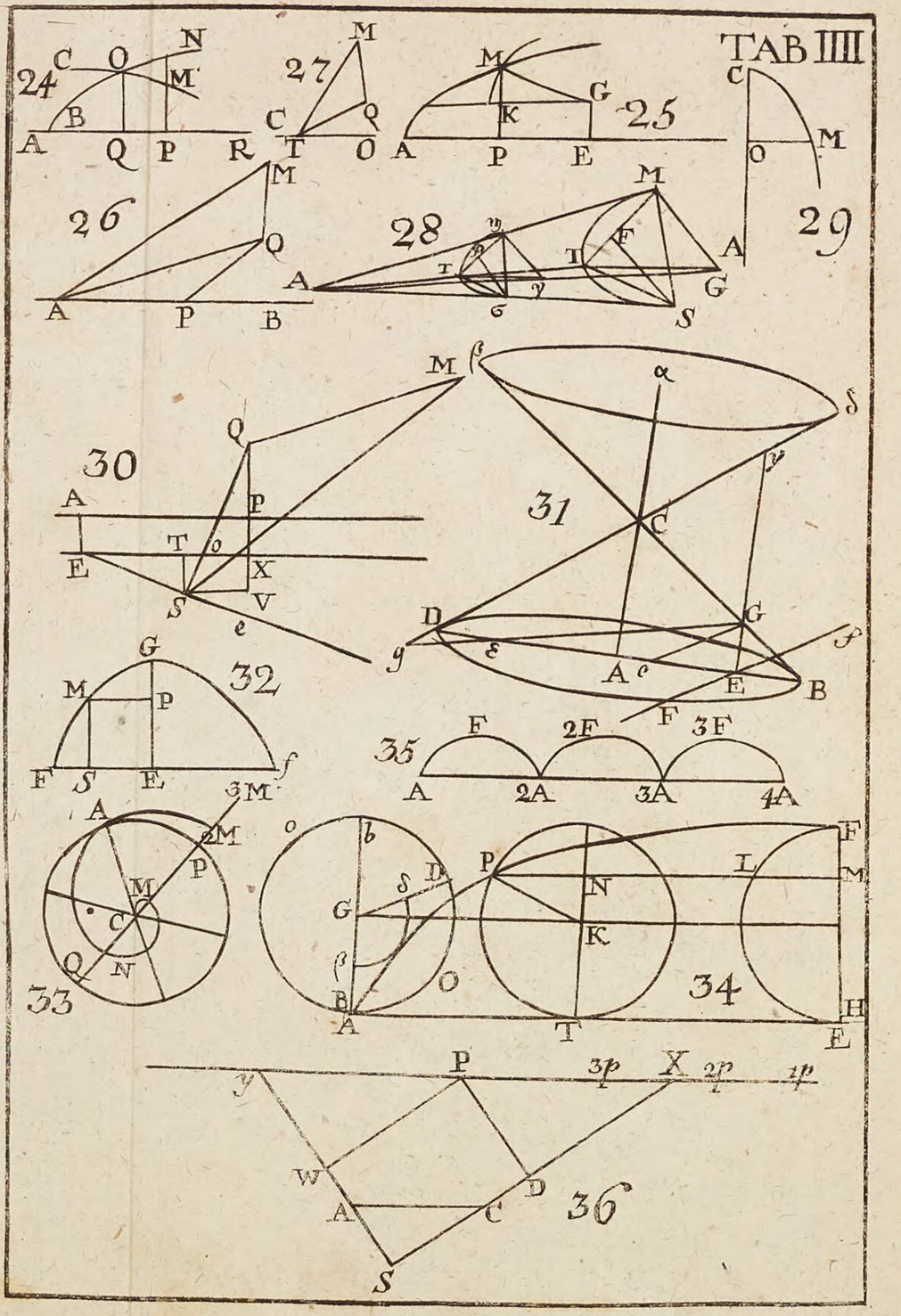
16



TAB III


18
i
n
H
M
17
i
N
n
I
L
1
C
G
M
q
K
A
K p P V q D
o H
O
B
H
C
19
N
I
M
O
P
A
C M G
F
E
D
20
A P
B
L
A
M
23
E
λ
m
α C
L A
M
N
P
B E
Q R S
T
F
λ α η
C
21
A G
L
M
22
B
F
E ρ
R
λ
γ
η
G
K
δ
D
α k

TAB IIII


24
C O N M
B
A Q P R
27
M
C Q
T O
25
M G
K
A P E
C
O M
29
26
M
Q
A P B
28
M
y
β
F
A
T
T
A
G
γ
σ
S
30
M
Q
A
P
T o
E
X
V
S e
31
β
α
δ
γ
C
D
G
g
ε
A c
E
B
F
32
G
M
P
F S E f
35
F 2F F 3F
A 2A 3A 4A
33
A
3M
P
M
C
Q N
34
o
b
D
δ
P
L
F
M
N
G
K
ρ
B
A
O
T
H
E
36
P 3p X 2p 1p
y
W
D
A
C
S

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kästner, Abraham Gotthelf,

Anfangsgruende der Analysis endlicher Grössen

Goettingen 1767
Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.27(3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739683-4
VD18 10541926-004